המשפט היסודי של קלקולוס חלק 1

אם $f$ רציפה על $[a,b]$ אז $F_{(x)}=\int_a^x f_{(t)}dt$ רציפה על $[a,b]$ וגזירה על $[a,b]$ ונגזרתה היא $f_{(x)}$ :

$$F'_{(x)}=\frac{d}{dx}\int_a^x f_{(t)}dt=f_{(x)}$$

א. חשב את הערך של $f_{(1/2)}$ מתוך הנתון $\int_1^{sinx} f_{(t)}\,dt = x\cdot sinx$

כאן הגבול העליון אינו $x$ אלא $sin\,x$ , כך ש- $y=\int_1^{sinx} f_{(t)}\,dt$ מורכבת בעצם משתי פונקציות :

$y=\int_1^{u} f_{(t)}\,dt$ ו- $u=sin\,x$ . כדי למצוא את $\frac{dy}{dx}$ יש להחיל את כלל השרשרת : $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$

$$\frac{d}{dx}\int_1^{sinx} f_{(t)}\,dt = \frac{d}{dx}[x\cdot sinx] \quad => \quad \frac{d}{du}\int_0^{u} f_{(t)}\,dt\cdot\frac{d}{dx}[u] = \frac{d}{dx}[x\cdot sinx] \quad =>$$

$$=> \quad f_{(u)}\cdot cos\,x = sin\,x + x\cdot cos\,x \quad => \quad f_{(sin\,x)} = tan\,x + x$$

נברר כעת מהו ערכו של $x$ כאשר $sin\,x=\frac{1}{2}$ :

$$sin\,x=\frac{1}{2} \quad => \quad x={}^{\pi}\!/_{6}$$

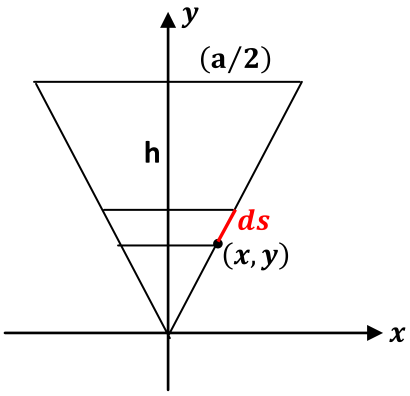
את הפתרונות שהתקבלו ל- $x$ נציב בפונקציה $f_{(sin\,x)} = tan\,x+x$ שקיבלנו קודם:

$$f_{\left[sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]} = tan\left(\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{\pi}{6} = \frac{2\sqrt{3}+\pi}{6}$$

ב. תוך שימוש באינטגרל לצורך חישוב שטח מעטפת של גוף סימטרי, הוכח כי שטח המעטפת של פירמידה מרובעת ישרה שווה לארבע פעמים שטח פאתה: $a\left(4h^2+a^2\right)^{0.5}$ . $a$ הוא אורך צלע הבסיס הריבועי ו- $h$ הוא גובהה.

רמז: הפוך את הפירמידה כך שקודקודה מטה וצייר חתך העובר במרכזה.

קיבלת משולש שווה שוקיים שקודקודו בראשית הצירים. מכאן המשך לבד.




$$dA = 8x\cdot ds = 8x\sqrt{1+m^2}dx \quad => \quad A=8\sqrt{1+m^2}\int_0^{a/2} xdx =$$

$$= 4\sqrt{1+m^2}\cdot x^2\Big|_0^{a/2} = \sqrt{1+\frac{4h^2}{a^2}}\cdot a^2 = \sqrt{\frac{a^2+4h^2}{a^2}}\cdot a^2 =$$

$$= \frac{\sqrt{a^2+4h^2}}{a}\cdot a^2 = \sqrt{a^2+4h^2}\cdot a$$