1. גבולות – מצא את הגבולות הבאים (ללא לופיטל)

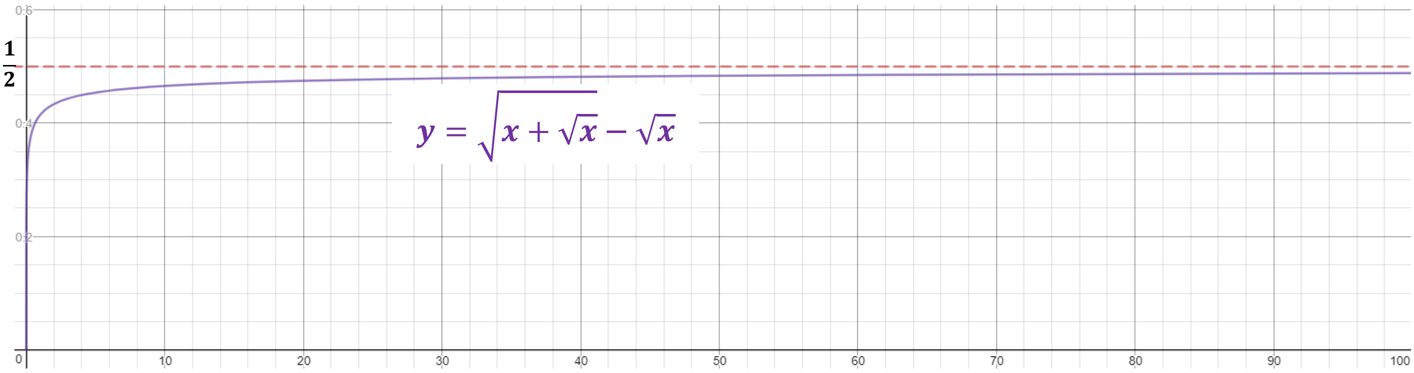
(20 נקוד') $\lim_{x\to 3^-}\frac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}$. (15 נקוד') $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan(7x)}{\sin(3x)}+2\right)$. (15 נקוד') $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)$.

פיתרון:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right) = [\infty-\infty] = \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)\cdot\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x+\sqrt{x}-x}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}+\sqrt{x}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}+\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}+1} = \frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{1}{\sqrt{\infty}}\right)}+1} = \frac{1}{\sqrt{1}+1} = \frac{1}{2}$$

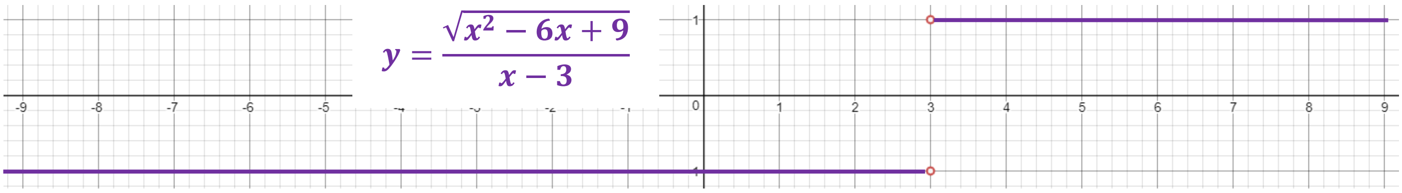


$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan(7x)}{\sin(3x)}+2\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(7x)}{\sin(3x)}\cdot\frac{1}{\cos(7x)}+2\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(7x)}{7x}\cdot\frac{7x}{\sin(3x)}\cdot\frac{3x}{3x}\cdot\frac{1}{\cos(7x)}+2\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(7x)}{7x}\cdot\frac{3x}{\sin(3x)}\cdot\frac{7x}{3x}\cdot\frac{1}{\cos(7x)}+2\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(7x)}{7x}\cdot\frac{3x}{\sin(3x)}\cdot\frac{7}{3}\cdot\frac{1}{\cos(7x)}+2\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin(7x)}{7x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\sin(3x)}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos(7x)}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{7}{3}+\lim_{x\to 0}2 = 1\cdot 1\cdot 1\cdot\frac{7}{3}+2 = \frac{13}{3} = 4\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 3^-}\frac{\sqrt{(x-3)^2}}{x-3} = \lim_{x\to 3^-}\frac{|x-3|}{x-3} = \lim_{x\to 3^-}\frac{-(x-3)}{x-3} = -\lim_{x\to 3^-}1 = -1$$



2. רציפות וגזירות

$$f_{(x)}=\begin{cases}2x-1 & , \; 1<x\\ ax^2+bx+c & , \; -1\le x\le 1\\ -x & , \; x<-1\end{cases}$$

א) מהם ערכי הפרמטרים *a,b,c* כך שהפונקציה תהיה רציפה לכל *x* וגזירה בנקודה $x=-1$ (20 נקו')?

ב) האם עבור ערכי הפרמטרים שמצאת בסעיף א' הפונקציה גזירה בנקודה $x=1$ (15 נקו')?

ג) שרטט גרף של $f_{(x)}$ בתחום $-4\le x\le 4$ (15 נקו').

פיתרון א' :

כדי שפונקציה תהיה רציפה בנקודה x_0, גבול הפונקציה בנקודה צריך להיות שווה לערך הפונקציה בנקודה:

גבול חד צדדי שמאלי ב- $x=-1$: $\quad lim_{x\to-1^-}f_{(x)} = lim_{x\to-1^-}(-x) = 1$

גבול חד צדדי ימני ב- $x=-1$: $\quad lim_{x\to-1^+}f_{(x)} = lim_{x\to-1^+}(ax^2+bx+c) = a-b+c$

כדי שלפונקציה יהיה גבול ב- $x=-1$, על שני הגבולות החד צדדיים להיות שווים זה לזה: $a-b+c=1$

ערך הפונקציה ב- $x=-1$ שווה מן הסתם לגבול החד צדדי הימני - שניהם מתקבלים הרי מהצבה בפונקציה.

<u>אם כך, $a-b+c=1$ הוא תנאי לרציפות הפונקציה הנתונה בנקודה $x=-1$.</u>

כעת עלינו לחזור על התהליך עבור הנקודה $x=1$:

גבול חד צדדי שמאלי ב- $x=1$: $\quad lim_{x\to1^-}f_{(x)} = lim_{x\to1^-}(ax^2+bx+c) = a+b+c$

גבול חד צדדי ימני ב- $x=1$: $\quad lim_{x\to1^+}f_{(x)} = lim_{x\to1^+}(2x-1) = 1$

כדי שלפונקציה יהיה גבול ב- $x=1$, על שני הגבולות החד צדדיים להיות שווים זה לזה: $a+b+c=1$

ערך הפונקציה ב- $x=1$ שווה מן הסתם לגבול החד צדדי השמאלי - שניהם מתקבלים הרי מהצבה בפונקציה.

<u>אם כך, $a+b+c=1$ הוא תנאי לרציפות הפונקציה הנתונה בנקודה $x=1$.</u>

$$\begin{cases}a-b+c=1\\ a+b+c=1\end{cases} \;=>\; a+c=1 \;=>\; b=0$$

$under\ these\ two\ conditions, the\ given\ function\ is\ continuous\ for\ all\ values\ of\ x$

כעת נפנה לטפל בגזירות הפונקציה ב- $x=-1$. עלינו לדאוג לכך שיהא קיים גבול לנגזרת בנקודה זו:

$$f'_{(x)}=\begin{cases}2 & , \; 1<x\\ 2ax+b & , \; -1\le x\le 1\\ -1 & , \; x<-1\end{cases}$$

גבול חד צדדי שמאלי של הנגזרת ב- $x=-1$: $\quad lim_{x\to-1^-}f'_{(x)} = lim_{x\to-1^-}(-1) = -1$

גבול חד צדדי ימני של הנגזרת ב- $x=-1$: $\quad lim_{x\to-1^+}f'_{(x)} = lim_{x\to-1^+}(2ax+b) = -2a+b$

כדי שלנגזרת יהיה גבול ב- $x=-1$, על שני הגבולות החד צדדיים שלה להיות שווים זה לזה: $-2a+b=-1$.

אנו יודעים אבל ש- $b=0$ הוא תנאי לרציפות הפונקציה <u>בכל</u> x , ואם כך $2a=1$, ז"א $a=\frac{1}{2}$.

אנו יודעים גם ש- $a+c=1$ הוא תנאי נוסף לרציפות הפונקציה <u>בכל</u> x , ואם כך $c=\frac{1}{2}$

לסיכום, $a=\frac{1}{2}$, $b=0$ ו- $c=\frac{1}{2}$ מבטיחים רציפות הפונקציה הנתונה <u>בכל</u> x , וכן גזירות הפונקציה בנקודה $(-1,1)$.

פיתרון ב' : האם הפונקציה גזירה ב- $x = 1$?

$$f_{(x)} = \begin{cases} 2x - 1 & , \quad 1 < x \\ \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} & , \quad -1 \le x \le 1 \\ -x & , \quad x < -1 \end{cases}$$

$$f'_{(x)} = \begin{cases} 2 & , \quad 1 < x \\ x & , \quad -1 \le x \le 1 \\ -1 & , \quad x < -1 \end{cases}$$

גבול חד צדדי שמאלי של הנגזרת ב- $x = 1$: $\lim_{x\to 1^-} f'_{(x)} = \lim_{x\to 1^-}(x) = 1$

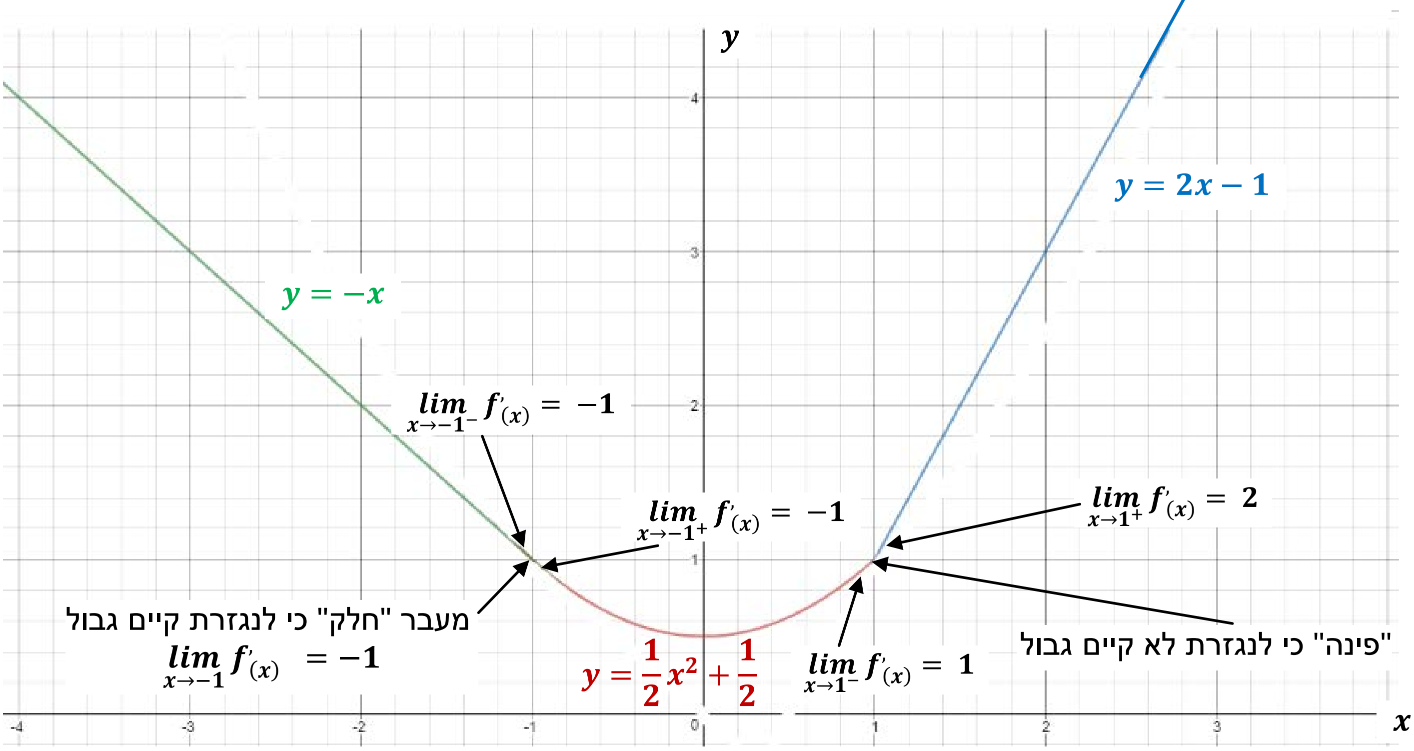
גבול חד צדדי ימני של הנגזרת ב- $x = 1$: $\lim_{x\to 1^+} f'_{(x)} = \lim_{x\to 1^+}(2) = 2$

הפונקציה אינה גזירה ב- $x = 1$ כי לנגזרת לא קיים גבול בנקודה זו - הגבולות החד צדדיים שונים זה מזה:

$$\lim_{x\to 1^-} f'_{(x)} = 1 \quad \neq \quad \lim_{x\to 1^+} f'_{(x)} = 2$$

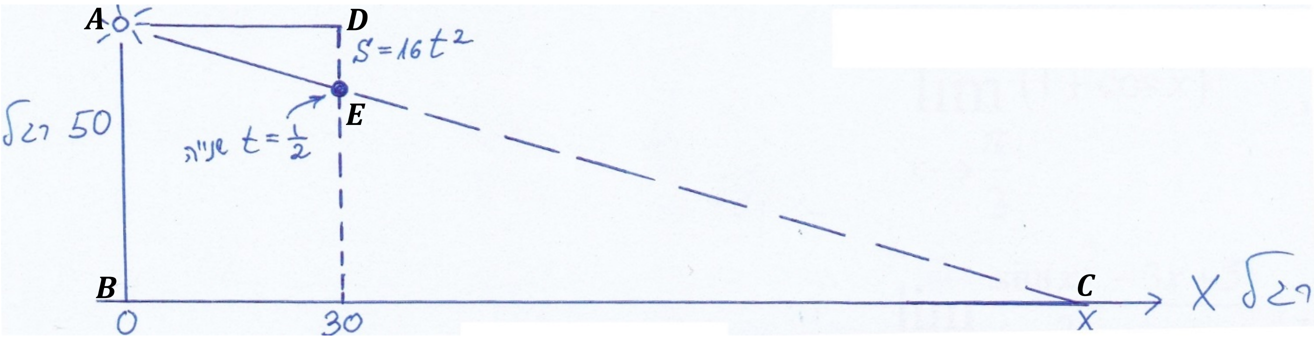
פיתרון ג': שרטוט גרף של $f_{(x)}$ בתחום $-4 \le x \le 4$

$$f_{(x)} = \begin{cases} 2x - 1 & , \quad 1 < x \\ \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} & , \quad -1 \le x \le 1 \\ -x & , \quad x < -1 \end{cases}$$



3. שימושי הנגזרת

עמוד תאורה שגובהו 50 רגל מאונך לציר ה-x. בראש העמוד מקור אור. כדור נופל נפילה חופשית מגובה של 50 רגל, במקביל לעמוד התאורה ובמרחק של 30 רגל ממנו, כמתואר בציור. המרחק שעובר הכדור במהלך נפילתו נתון על ידי הביטוי $S = 16t^2$. צלו של הכדור נע לאורך ציר ה-x. הזמן t בשניות.



א. שרטט גרף של מיקום הצל, x, כתלות בזמן, t (10 נק'). רשום ביטוי אלגברי המתאר את x כתלות ב- t (10 נק').

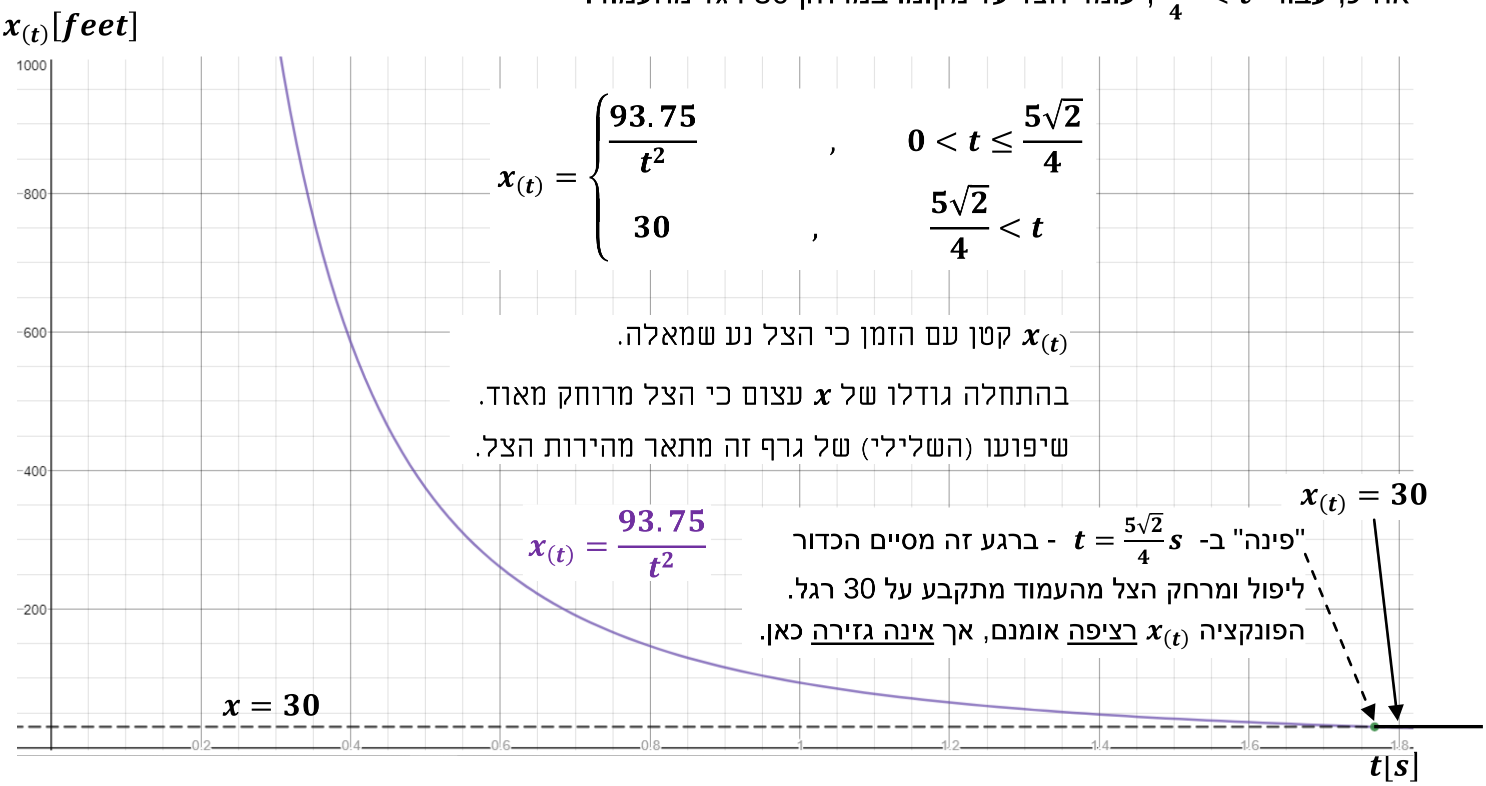
ב. שרטט גרף של מהירות הצל, $\frac{dx}{dt}$, כתלות בזמן (15 נק'). רשום ביטוי אלגברי עבור $\frac{dx}{dt}$ כתלות ב- t (15 נק').

פיתרון א' - ביטוי אלגברי למיקום הצל וגרף מתאים:

$$\Delta ABC \sim \Delta EDA \quad => \quad \frac{50}{x} = \frac{16t^2}{30} \quad => \quad x_{(t)} = \frac{93.75}{t^2}$$

משך הנפילה הינו $16t^2 = 50 \quad => \quad t = \frac{5\sqrt{2}}{4} \approx 1.768s$, לכן הביטוי $x_{(t)} = \frac{93.75}{t^2}$ תקף בפרק הזמן $0 < t \le \frac{5\sqrt{2}}{4}$.

אח"כ, עבור $\frac{5\sqrt{2}}{4} < t$, עומד הצל על מקומו במרחק 30 רגל מהעמוד.



פיתרון ב' - ביטוי אלגברי למהירות הצל וגרף מתאים:

$$x_{(t)} = \frac{93.75}{t^2} \quad => \quad \frac{dx}{dt} = -\frac{93.75}{t^4}\cdot 2t \quad => \quad v_{(t)} = \frac{dx}{dt} = -\frac{187.5}{t^3}$$