.1 גבול, רציפות וגזירות (25 נקודות)

א. חשב **ללא** מחשבון וללא לופיטל את הגבול, $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2-x}+2x\right)$ (13 נק')

פיתרון:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2-x}+2x\right) = [\infty-\infty] = \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2-x}+2x}{1}\cdot\frac{\sqrt{4x^2-x}-2x}{\sqrt{4x^2-x}-2x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{4x^2-x-4x^2}{\sqrt{4x^2-x}-2x} = -\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{4x^2-x}-2x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = -\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2\left(4-\frac{1}{x}\right)}-2x} =$$

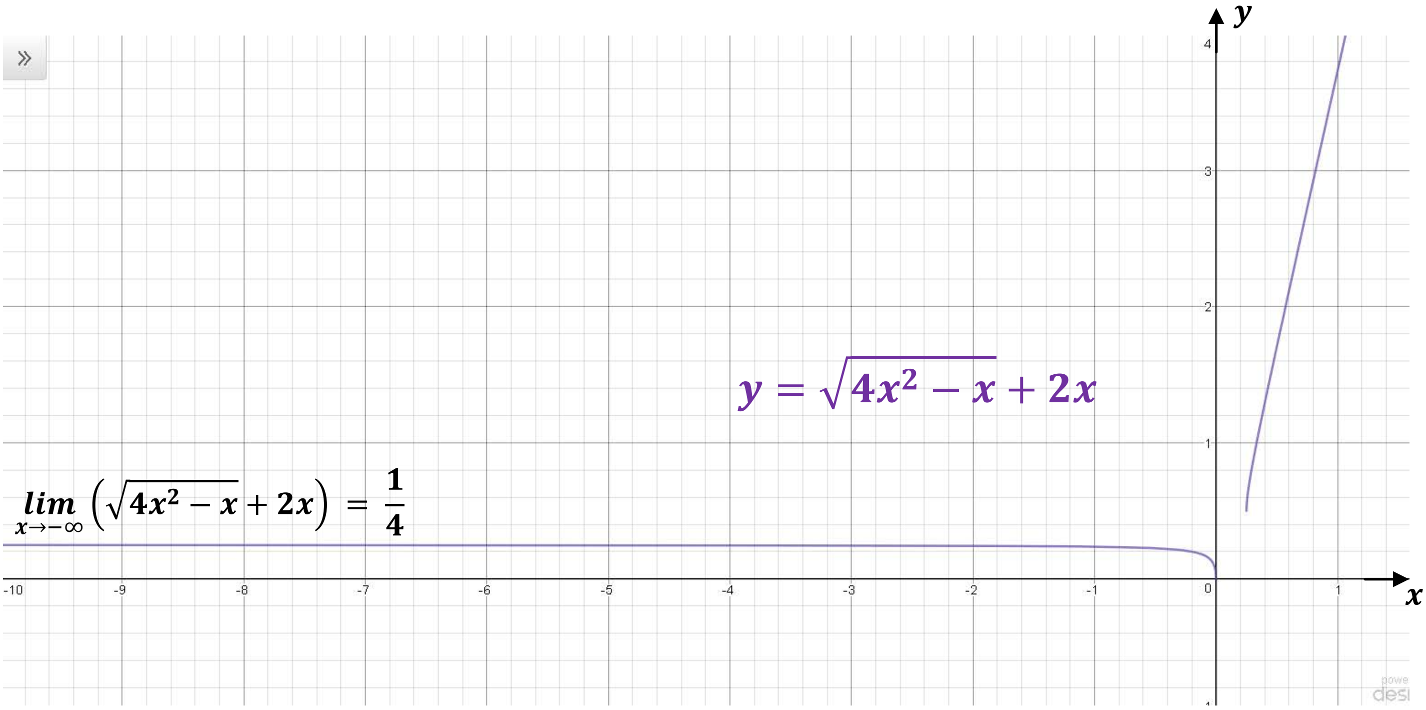
$$= -\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{|x|\sqrt{4-\frac{1}{x}}-2x}$$

כאשר $x>\mathbf{0}$ אין משמעות לערך המוחלט, אבל מקרה זה לא מעניין אותנו כי מדובר כאן ב- x שלילי.

כאשר $x<0$ יש משמעות לערך המוחלט, וזה המקרה שמעניין אותנו. הגבול יכול אז להיכתב כך:

$$-\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{-x\sqrt{4-\frac{1}{x}}-2x} = -\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{-x\left[\sqrt{4-\frac{1}{x}}+2\right]} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{4-\frac{1}{x}}+2} = \frac{1}{\sqrt{4+0^+}+2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}$$



ב. נתונה הפונקציה $f(x)=\begin{cases}A-3x^2 & , \quad x>1\\ x^2-Bx+1 & , \quad x\le 1\end{cases}$

מצא את ערכי A ו-B עבור הפונקציה *f(x)* גזירה לכל *x*. הסבר את שיקוליך. (12 נק')

פיתרון:

כדי שפונקציה תהיה גזירה עליה להיות רציפה בתחום הגדרתה ("כל x" במקרה דנן, כי זו פונקצית פולינום).

אי רציפות בפונקצית פולינום יכולה להופיע רק ב"נקודות תפר" שבין תחומים ($x=1$ במקרה דנן).

נדרוש שב- $x=1$ יהא הגבול החד-צדדי הימני של <u>הפונקציה</u> שווה לזה השמאלי (ולפונקציה), ונקבל רציפות:

$$\lim_{x\to1^-} f_{(x)} = f_{(1)} = \lim_{x\to1^+} f_{(x)} \quad => \quad \lim_{x\to1^-}(x^2-Bx+1) = 2-B = \lim_{x\to1^+}(A-3x^2) \quad =>$$

$$2-B = A-3 \quad => \quad A+B = 5 \quad \textit{under this condition, the given function is continuous.}$$

כעת מובטחת רציפות בכל נקודה שעל הפונקציה, אך מה אם בנקודת התפר מתקבלת "פינה" ?

נדרוש שב- $x=1$ יהא הגבול החד-צדדי הימני של <u>הנגזרת</u> שווה לזה השמאלי, ונקבל "מעבר חלק" בין שני התחומים של הפונקציה, ז"א גזירות:

$$\lim_{x\to1^-} f'_{(x)} = \lim_{x\to1^+} f'_{(x)} \quad => \quad \lim_{x\to1^-}(2x-B) = \lim_{x\to1^+}(-6x) \quad => \quad 2-B = -6 \quad => \quad B=8$$

$$A+B = 5 \quad => \quad A+8 = 5 \quad => \quad A=-3$$

$$f(x)=\begin{cases}-3-3x^2, & x>1\\ x^2-8x+1, & x\le 1\end{cases} \quad \textit{is differentiable for all values of } x$$

הפרבולה המחייכת רלוונטית משמאל ל- $x=1$.

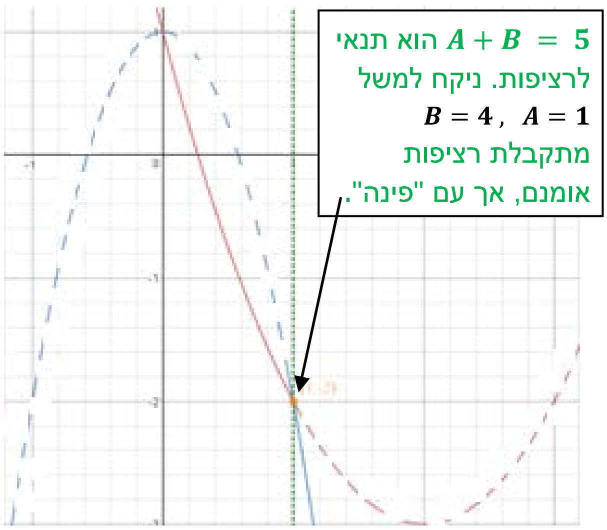
הפרבולה הבוכה רלוונטית מימין ל- $x=1$.

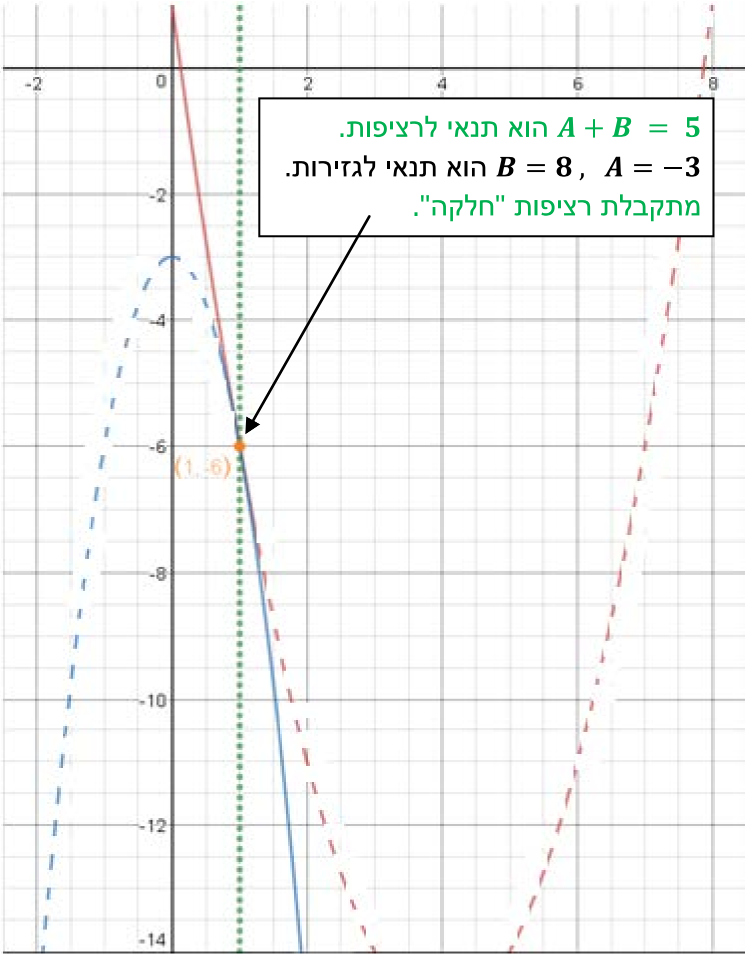
באיור מימין, שימו לב למעבר החלק מ"מחייכת" ל"בוכה" הודות להצבות $A=-3$ ו- $B=8$.

מתקבל אז משיק משותף לשתי הפרבולות ב- $(1,-6)$.

אנו מבינים כעת שנקודת התפר $(1,-6)$ היא נקודת פיתול - מעבר מקעירות לקמירות.

באיור מתחת, מתקיים התנאי לרציפות, $A+B = 5$, אך לא התנאי לגזירות. מתקבלת לכן "פינה" בנקודת התפר.





2. הוכחת כלל לופיטל (25 נקודות)

על פי כלל לופיטל, אם הגבול של המנה $\frac{f(x)}{g(x)}$ כאשר x שואף ל-a מניב $\left[\frac{0}{0}\right]$, ניתן לחשבו באמצעות גזירת המונה בנפרד והמכנה בנפרד, כלומר, $\frac{f'(a)}{g'(a)} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$. עליך להוכיח זאת.

רמז: בטא בעזרת הגדרת הנגזרת את אגף ימין של הביטוי הנ"ל. עליך להגיע לאגף שמאל. הראה והסבר את שיקוליך.

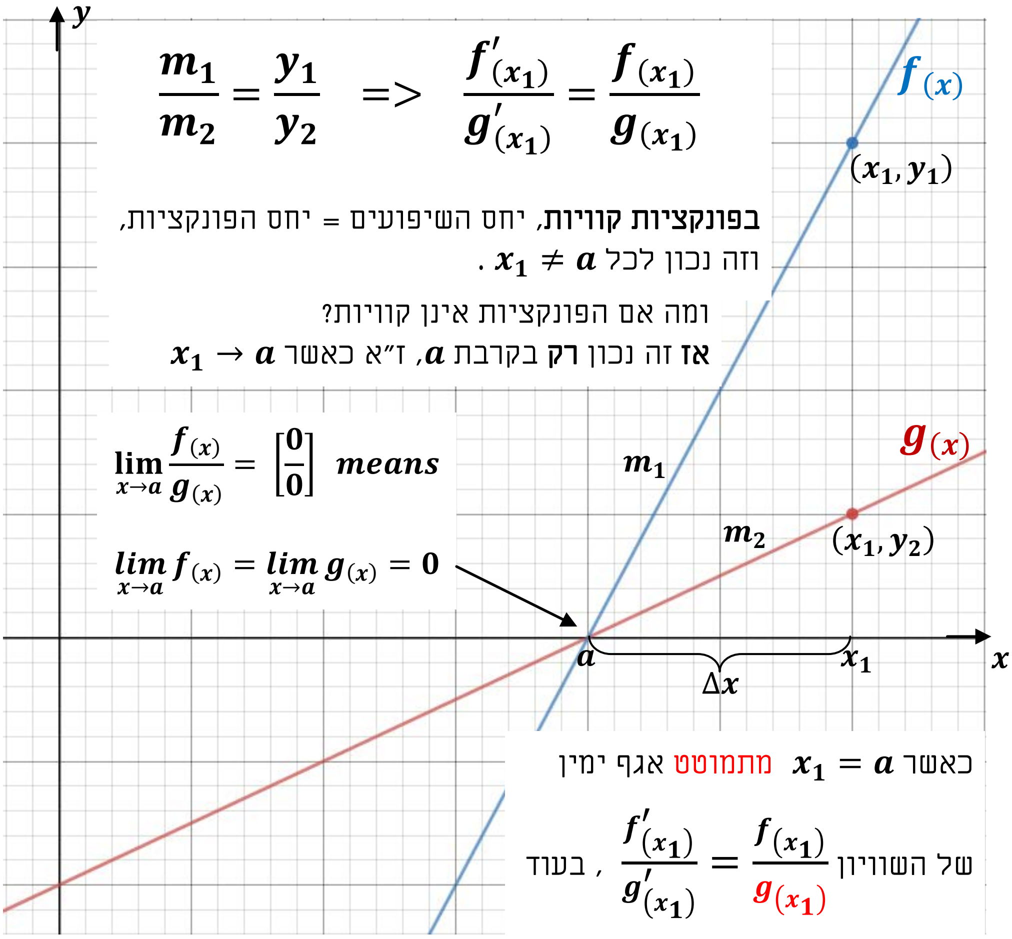
פיתרון:

נתון: $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ צ"ל: $\frac{f'(a)}{g'(a)} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$

מהנתון עולה ש- $f(a) = g(a) = 0$. מדוע? כי אם f ו- g גזירות בנקודה $x = a$ הן גם רציפות בה, ואז מתקיים: $\lim_{x\to a} g(x) = g(a)$ $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

$$\frac{f'(a)}{g'(a)} = \frac{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}}{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{g(a+\Delta x) - g(a)}{\Delta x}} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{f(a+\Delta x) - 0}{\Delta x}}{\frac{g(a+\Delta x) - 0}{\Delta x}} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)}{g(a+\Delta x)} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$$

שימו לב שלומר "דלתא x שואף ל- 0" ולומר "x שואף ל- a" זה היינו הך, כי הרי דלתא x היא המרחק שבין x לבין a.



כאשר $x_1 = a$ מתמוטט אגף ימין של השוויון $\frac{f(x_1)}{g(x_1)} = \frac{f'(x_1)}{g'(x_1)}$, בעוד אגף שמאל נותר תקין ומצביע על ערכו של אגף ימין כאשר $x_1 \to a$

לופיטל הבין כאן שני דברים:

א. אם שתי פונקציות קוויות חותכות את ציר x באותה הנקודה (a) , אז $\frac{m_1}{m_2} = \frac{y_1}{y_2}$

ב. כאשר $x \to a$, הדיון **בשיפועה** $(f'(a))$ של פונקציה כלשהי, דומה לדיון בשיפועה (m) של פונקציה קווית. מדוע? כי ממילא מדובר במיתוח (קצר) שהינו עצמו פונקציה קווית.

3. בנקודת החיתוך בין העקומה $(x+y)^3-5x+y=10$ והישר $x+y=-1$ מעבירים משיק לעקומה.
מצאו את נקודת ההשקה ואת משוואת המשיק (25 נקו').

פיתרון:

$$\begin{cases}(x+y)^3-5x+y=10\\ x+y=-1\end{cases} \quad => \quad (-1)^3-5x+y=10 \quad => \quad -5x+y=11$$

$$\begin{cases}-5x+y=11\\ x+y=-1\end{cases} \quad => \quad 6x=-12 \quad => \quad x=-2 \quad => \quad y=1 \quad => \quad (-2,1)\ intersection\ point$$

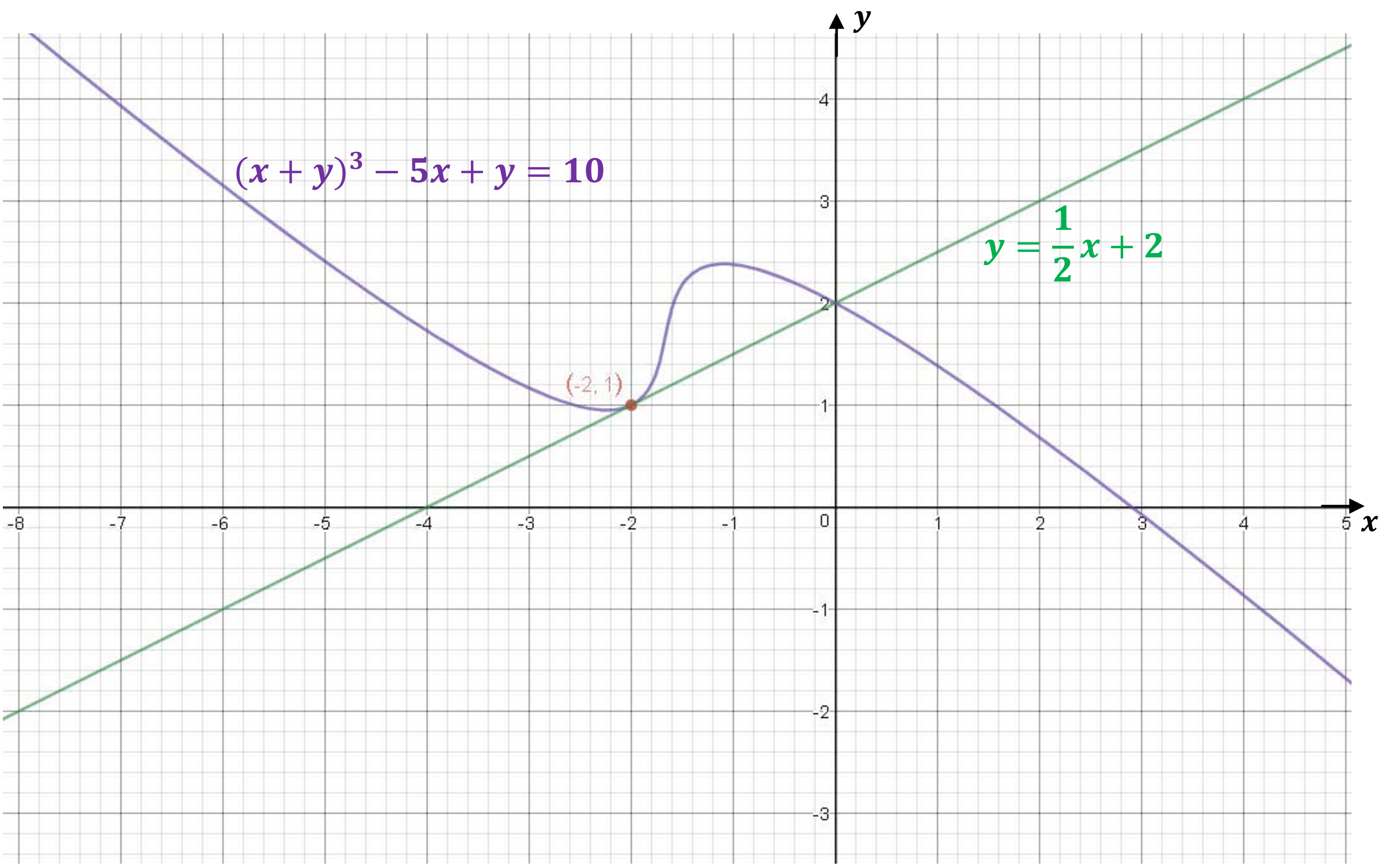
בנקודה זו מעבירים משיק לעקומה. עלינו לגזור את הפונקציה (הסתומה) ואז להציב בנגזרת את שיעורי הנקודה - נקודת ההשקה. כך נקבל את שיפועו m של המשיק המבוקש :

$$3(x+y)^2(1+y')-5+y'=0 \quad => \quad 3(x+y)^2+3(x+y)^2\cdot y'+y'=5 \quad =>$$

$$[3(x+y)^2+1]\cdot y'=5-3(x+y)^2 \quad => \quad y'_{(x,y)}=\frac{5-3(x+y)^2}{3(x+y)^2+1} \quad => \quad m=\ y'_{(-2,1)}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

כעת יש בידנו נקודה על המשיק ואת שיפועו, כך שקל למצוא את משוואתו:

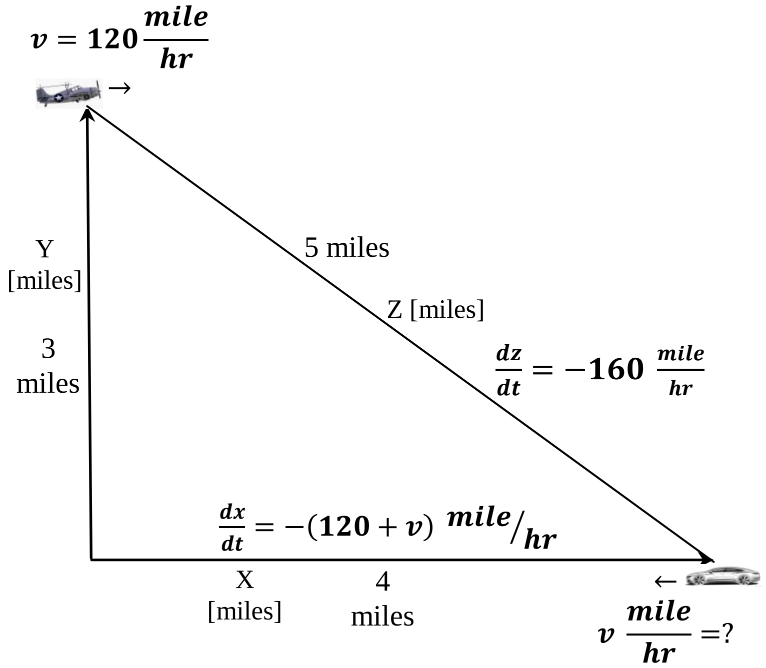
$$y-y_1=m(x-x_1) \quad => \quad y-1=\tfrac{1}{2}(x+2) \quad => \quad y=\tfrac{1}{2}x+2$$



4. מטוס משטרתי טס אופקית בגובה של 3 מייל מעל כביש ישר (קווים מקבילים) במהירות קבועה של 120 מיילים לשעה. הטייס מבחין במכונית חשודה המתקרבת והרדאר במטוסו מציין מרחק של 5 מיילים ביניהם המתקצר באותו הרגע בקצב של 160 מיילים לשעה. מהי מהירות המכונית החשודה באותו הרגע? (25 נקו')

פיתרון:

אנו נשאלים מהי v ברגע המתואר בציור:



נזכור כי X, ו- Z תלויים בזמן.

נשתמש במשפט פיתגורס

ונגזור לפי זמן תוך שימוש בכלל השרשרת :

$$z^2 = x^2 + 3^2 \quad =>$$

$$2z \cdot \frac{dz}{dt} = 2x \cdot \frac{dx}{dt} + 0 \quad =>$$

$$=> \quad z \cdot \frac{dz}{dt} = x \cdot \frac{dx}{dt} \quad =>$$

$$=> \quad 5 \cdot (-160) = -4 \cdot (120 + v) \quad =>$$

$$=> \quad -1600 = -960 - 8v \quad =>$$

$$=> \quad 8v = 640 \quad => \quad v = 80\ mile/hr$$

אפשר גם כך:

$$z^2 = x^2 + 3^2 \quad => \quad x = \sqrt{z^2 - 9} \quad => \quad \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dz} \cdot \frac{dz}{dt} \quad => \quad \frac{dx}{dt} = \frac{2z}{2\sqrt{z^2 - 9}} \cdot \frac{dz}{dt} \quad =>$$

$$=> \quad \frac{dx}{dt} = \frac{z}{\sqrt{z^2 - 9}} \cdot \frac{dz}{dt} \quad => \quad -(120 + v) = \frac{5}{\sqrt{5^2 - 9}} \cdot (-160) \quad =>$$

$$120 + v = 160 \cdot \frac{5}{4} \quad => \quad v = 200 - 120 \quad => \quad v = 80 mile/hr$$

א) הוכחה לכך שהנגזרת של פונקציה אי-זוגית הינה זוגית:

$$f_{(x)} = -f_{(-x)} \quad \textit{this equality holds for all odd functions}$$

<u>בעזרת כלל השרשרת, תוך הצבת $u = -x$</u>:

$$f'_{(x)} = \frac{d}{dx}[f_{(x)}] = \frac{d}{dx}[-f_{(-x)}] = -\frac{d}{dx}[f_{(-x)}] = -\frac{d}{du}[f_{(u)}] \cdot \frac{du}{dx} =$$

$$= -\frac{d}{du}[f_{(u)}] \cdot (-1) = \frac{d}{du}[f_{(u)}] = f'_{(u)} = f'_{(-x)}$$

<u>באמצעות הגדרת הנגזרת</u>:

$$f'_{(-x)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_{(-x+\Delta x)} - f_{(-x)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-f_{(x-\Delta x)} + f_{(x)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_{(x)} - f_{(x-\Delta x)}}{\Delta x} = f'_{(x)}$$

גזרנו פונקציה אי-זוגית וקיבלנו ש- $f'_{(-x)} = f'_{(x)}$, משמע **<u>הנגזרת של פונקציה אי-זוגית היא זוגית</u>**.

ב) הוכחה לכך שהנגזרת של פונקציה זוגית הינה אי-זוגית:

$$f_{(x)} = f_{(-x)} \quad \textit{this equality holds for all even functions}$$

<u>בעזרת כלל השרשרת, תוך הצבת $u = -x$</u>:

$$f'_{(x)} = \frac{d}{dx}[f_{(x)}] = \frac{d}{dx}[f_{(-x)}] = \frac{d}{du}[f_{(u)}] \cdot \frac{du}{dx} =$$

$$= \frac{d}{du}[f_{(u)}] \cdot (-1) = -\frac{d}{du}[f_{(u)}] = -f'_{(u)} = -f'_{(-x)}$$

<u>באמצעות הגדרת הנגזרת</u>:

$$f'_{(-x)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_{(-x+\Delta x)} - f_{(-x)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_{(x-\Delta x)} - f_{(x)}}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_{(x)} - f_{(x-\Delta x)}}{\Delta x} = -f'_{(x)}$$

גזרנו פונקציה זוגית וקיבלנו ש- $f'_{(-x)} = -f'_{(x)}$, משמע **<u>הנגזרת של פונקציה זוגית היא אי-זוגית</u>**.