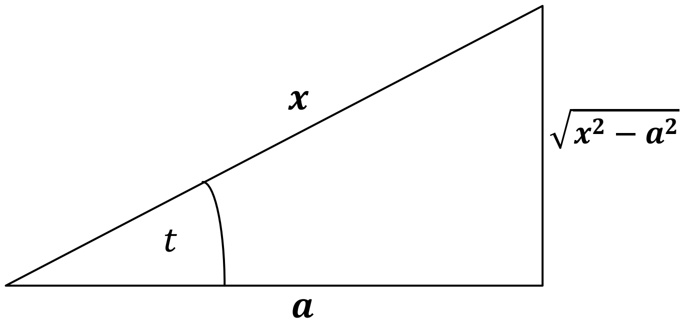
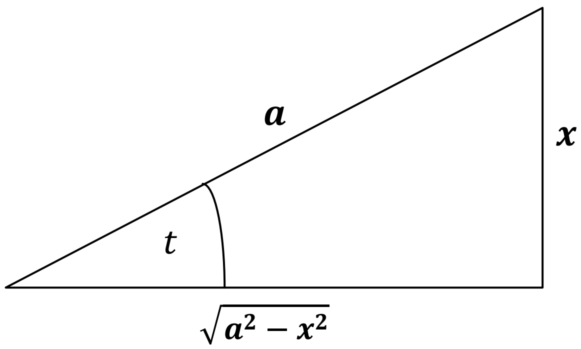


$$\int \dots \sqrt{x^2 - a^2} \cdot dx$$

$$x = \frac{a}{\cos t}$$

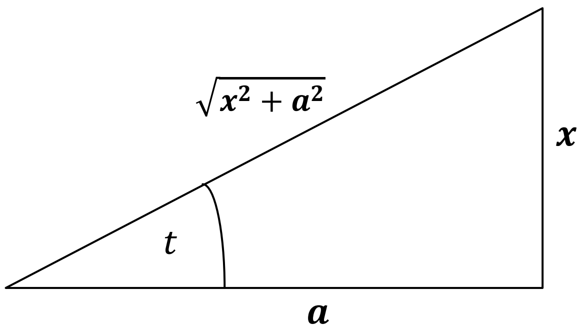
$$\sqrt{x^2 - a^2} = a \cdot \tan t$$



$$\int \dots \sqrt{a^2 - x^2} \cdot dx$$

$$x = a \sin t$$

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos t$$



$$\int \dots \sqrt{x^2 + a^2} dx$$

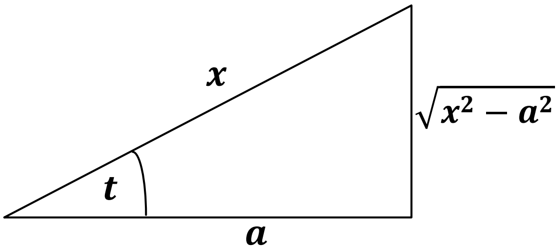
$$x = a\, tg\, t$$

$$\sqrt{x^2 + a^2} = \frac{a}{\cos t} \quad => \quad x^2 + a^2 = \frac{a^2}{\cos^2 t}$$

דוגמה 1 : חשב את $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx$

מזהה באינטגרנד $\sqrt{x^2-a^2}$ ומבין שזהו ניצב במשולש ישר זווית אשר בו x הוא היתר ו- a הוא הניצב השני.

מדוע? כי הרי $\sqrt{x^2-a^2}$ קטן מ- x , וגם a קטן מ- x , אז x חייב להיות היתר.



מסמן ב- t את הזווית שמול הניצב $\sqrt{x^2-a^2}$.

מטריגו בסיסי מבין ש- $\sqrt{x^2-a^2} = a\cdot\tan t$ (קל),

אבל מה להציב במקום dx? ובכן, מבין גם ש- $x=\frac{a}{\cos t}$

$$x=\frac{a}{\cos t} \quad => \quad \frac{dx}{dt}=\frac{-a\cdot(-\sin t)}{\cos^2 t} \quad => \quad dx=\frac{a\cdot\sin t}{\cos^2 t}dt$$

$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = \int\frac{1}{a\cdot\tan t}\cdot\frac{a\cdot\sin t}{\cos^2 t}dt = \int\frac{\cos t}{\sin t}\cdot\frac{\sin t}{\cos^2 t}dt =$$

$$=\int\frac{\cos t}{\cos^2 t}dt = \int\frac{\cos t}{1-\sin^2 t}dt \quad \to \quad \begin{cases} u=\sin t \\ du=\cos t\cdot dt \end{cases} \quad \leftarrow \quad another\ substitution$$

$$\int\frac{\cos t}{1-\sin^2 t}dt = \int\frac{1}{1-u^2}du = \int\frac{1}{(1-u)(1+u)}du = \int\left(\frac{A}{1-u}+\frac{B}{1+u}\right)du$$

באמצעות פירוק לשברים חלקיים נמצא את A ו-B ובכך נעבור מאינטגרל מסובך של מכפלה לאינטגרל פשוט של סכום.

$$\frac{1}{(1-u)(1+u)} = \frac{A}{1-u}+\frac{B}{1+u} = \frac{A(1+u)+B(1-u)}{(1-u)(1+u)} = \frac{(A-B)u+A+B}{(1-u)(1+u)}$$

$$1=(A-B)u+A+B \quad => \quad \begin{cases} A-B=0 \\ A+B=1 \end{cases} \quad => \quad 2A=1 \quad => \quad A=\frac{1}{2} \quad => \quad B=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{(1-u)(1+u)} = \frac{\frac{1}{2}}{1-u}+\frac{\frac{1}{2}}{1+u} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-u}+\frac{1}{1+u}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u+1}-\frac{1}{u-1}\right)$$

בשלב האחרון דאגנו לכך שנגזרת המכנה תהייה 1. נמנעת כך הטעות של "שכחתי לחלק בנגזרת הפנימית".

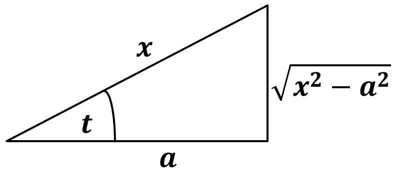
כעת אפשר לרשום את האינטגרל כאינטגרל של סכום (הפרש במקרה דנן) במקום כאינטגרל של מכפלה:

$$\int \frac{1}{(1-u)(1+u)}du \;=\; \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{u+1}-\frac{1}{u-1}\right)du \;=\; \frac{1}{2}\left(ln|u+1|-ln|u-1|\right) \;=$$

$$\frac{1}{2}ln\left|\frac{u+1}{u-1}\right| \;=\; \frac{1}{2}ln\left|\frac{\sin t+1}{\sin t-1}\right| \;=\; \frac{1}{2}ln\frac{1+\sin t}{1-\sin t} \;=\; \frac{1}{2}ln\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\cdot\frac{1+\sin t}{1+\sin t} \;=$$

$$=\; \frac{1}{2}ln\frac{(1+\sin t)^2}{1-sin^2 t} \;=\; \frac{1}{2}ln\frac{(1+\sin t)^2}{cos^2 t} \;=\; ln\sqrt{\frac{(1+\sin t)^2}{cos^2 t}} \;=\; ln\left|\frac{1+\sin t}{\cos t}\right| \;=$$

$$sin\,t \;=\; \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x} \qquad\qquad cos\,t \;=\; \frac{a}{x}$$



$$=\; ln\left|\frac{1+\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}}{\frac{a}{x}}\right| \;=\; ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right| \;=\; ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| - ln|a| + c$$

לסיכום:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx \;=\; ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C$$

דוגמה 1 ההופכית: חשב את $\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx$ (עיקר העבודה נעשתה כבר קודם, כפי שתכף נראה).

$$\sqrt{x^2-a^2} = a\cdot \tan t$$

$$x = \frac{a}{\cos t} \quad => \quad \frac{dx}{dt} = \frac{-a\cdot(-\sin t)}{\cos^2 t} \quad => \quad dx = \frac{a\cdot \sin t}{\cos^2 t}dt$$

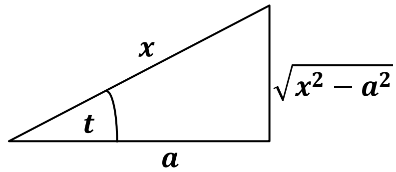
$$\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \int a\cdot\tan t\cdot\frac{a\cdot\sin t}{\cos^2 t}dt = a^2\int\frac{\sin^2 t}{\cos^3 t}dt$$

$$\int u\cdot dv = u\cdot v - \int v\cdot du$$

$$\int\frac{\sin^2 t}{\cos^3 t}dt = -\int \sin t\cdot\frac{-\sin t}{\cos^3 t}dt \rightarrow \begin{cases} u = \sin t & => \quad du = \cos t\cdot dt \\ dv = \dfrac{-\sin t}{\cos^3 t}dt & => \quad v = -\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\cos^2 t}\end{cases}$$

$$\int\frac{\sin^2 t}{\cos^3 t}dt = -\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin t}{\cos^2 t}+\frac{1}{2}\int\frac{\cos t}{\cos^2 t}dt\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin t}{\cos^2 t}-\int\frac{\cos t}{\cos^2 t}dt\right)$$

$$\frac{\sin t}{\cos^2 t} = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\cdot\frac{x^2}{a^2} = \frac{x\sqrt{x^2-a^2}}{a^2}$$



$$\int\frac{\cos t}{\cos^2 t}dt = \int\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| \quad \textit{as derived in example 1}$$

$$\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx = a^2\int\frac{\sin^2 t}{\cos^3 t}dt = a^2\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{\sin t}{\cos^2 t}-\int\frac{\cos t}{\cos^2 t}dt\right) =$$

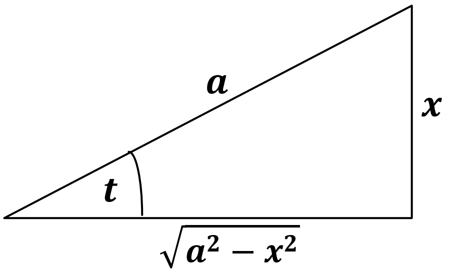
$$= \frac{a^2}{2}\left(\frac{x\sqrt{x^2-a^2}}{a^2}-\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|\right) = \frac{x\sqrt{x^2-a^2}}{2}-\frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C$$

$$\textit{sometimes written:} \quad \int\sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{x\sqrt{x^2-a^2}}{2}-\frac{a^2}{2}\int\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx + C$$

דוגמה 2: חשב את $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$

מזהה באינטגרנד $\sqrt{a^2-x^2}$ ומבין שזהו <u>ניצב</u> במשולש ישר זווית אשר בו a הוא <u>היתר</u> ו- x הוא הניצב השני.

מדוע? כי $\sqrt{a^2-x^2}$ קטן מ- a , וגם x קטן מ- a , אז a חייב להיות היתר.



מסמן ב- t את הזווית שמול הניצב x.

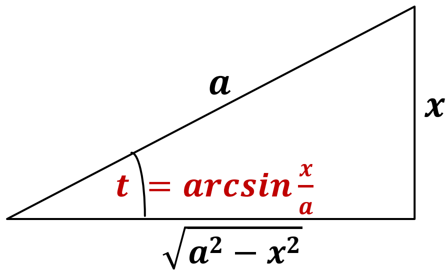
מטריגו בסיסי מבין ש- $\sqrt{a^2-x^2} = a\cos t$ (קליל),

אבל מה להציב במקום dx ? ובכן, מבין גם ש- $x = a\sin t$

$$x = a\sin t \quad => \quad \frac{dx}{dt} = a\cos t \quad => \quad dx = a\cos t\, dt$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \int \frac{1}{a\cos t}\cdot a\cos t\, dt = \int dt = t = \arcsin\frac{x}{a}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \arcsin\frac{x}{a} + C$$



דוגמה 2 ההופכית: חשב את $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$.

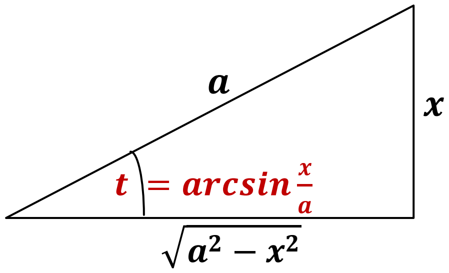
$$\sqrt{a^2-x^2} = a\cos t$$

$$x = a\sin t \quad => \quad \frac{dx}{dt} = a\cos t \quad => \quad dx = a\cos t\,dt$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \int a\cos t \cdot a\cos t\,dt = a^2\int \cos^2 t\,dt = \frac{1}{2}a^2\int(\cos 2t + 1)dt =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left[\frac{\sin 2t}{2} + t\right] = \frac{a^2}{2}\left[\frac{2\sin t\cos t}{2} + t\right] = \frac{a^2}{2}[\sin t\cos t + t] =$$

$$\sin t = \frac{x}{a} \qquad \cos t = \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}$$



$$= \frac{a^2}{2}\left[\frac{x}{a}\cdot\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a} + arcsin\frac{x}{a}\right] = \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}arcsin\frac{x}{a}$$

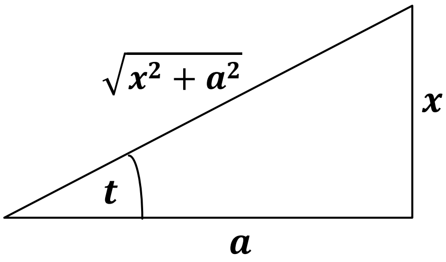
לסיכום:

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}arcsin\frac{x}{a} + C$$

sometimes written: $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx + C$

דוגמה 3: חשב את $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx$

מזהה באינטגרנד $\sqrt{x^2+a^2}$ ומבין שזהו יתר במשולש ישר זווית אשר בו x ו- a הם ניצבים.



מסמן ב- t את הזווית שמול הניצב x.

מטריגו בסיסי מבין ש- $\sqrt{x^2+a^2} = \frac{a}{\cos t}$

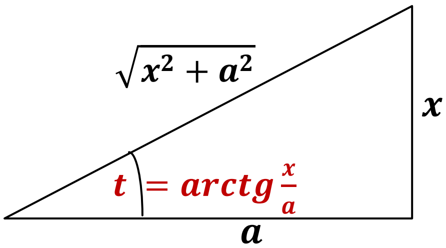
אבל מה להציב במקום dx? ובכן, מבין גם ש- $x = a\tan t$

$$x = a\tan t \quad => \quad \frac{dx}{dt} = \frac{a}{cos^2 t} \quad => \quad dx = \frac{a}{cos^2 t}dt$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = \int \frac{\cos t}{a}\cdot\frac{a}{cos^2 t}dt = \int \frac{\cos t}{cos^2 t}dt = \ldots\ldots\ldots =$$

$$= ln\left|\frac{1+\sin t}{\cos t}\right| \quad (as\ derived\ in\ example\ 1) \quad =$$

$$sin\,t = \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} \qquad cos\,t = \frac{a}{\sqrt{x^2+a^2}}$$



$$= ln\left|\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}}{\frac{a}{\sqrt{x^2+a^2}}}\right| = ln\left|\frac{\sqrt{x^2+a^2}+x}{a}\right| = ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| - ln|a| + c$$

לסיכום:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + C$$

דוגמה 3 ההופכית: חשב את $\int \sqrt{x^2+a^2}dx$

$$\sqrt{x^2+a^2} = \frac{a}{\cos t}$$

$$x = a\tan t \quad => \quad \frac{dx}{dt} = \frac{a}{cos^2 t} \quad => \quad dx = \frac{a}{cos^2 t}dt$$

$$\int \sqrt{x^2+a^2}dx \;=\; \int \frac{a}{\cos t}\cdot\frac{a}{cos^2 t}dt \;=\; a^2\int \frac{1}{cos^3 t}dt$$

$$\int \frac{1}{cos^3 t}dt \;=\; \int \frac{1}{\cos t}\cdot\frac{1}{cos^2 t}dt \quad \to \begin{cases} u = \dfrac{1}{\cos t} & => \quad du = \dfrac{\sin t}{cos^2 t}\cdot dt \\ dv = \dfrac{1}{cos^2 t}dt & => \quad v = tan\, t \end{cases}$$

$$\int u\cdot dv \;=\; u\cdot v - \int v\cdot du$$

$$\int \frac{1}{cos^3 t}dt \;=\; \frac{tan\, t}{\cos t} - \int tan\, t\frac{\sin t}{cos^2 t}\cdot dt \;=\; \frac{\sin t}{cos^2 t} - \int \frac{sin^2 t}{cos^3 t}dt \;=$$

$$\int \frac{sin^2 t}{cos^3 t}dt \;=\; \frac{1}{2}\left(\frac{sin\, t}{cos^2 t} - \int \frac{cos\, t}{cos^2 t}dt\right) \quad \textit{as derived in example 1 reciprocal}$$

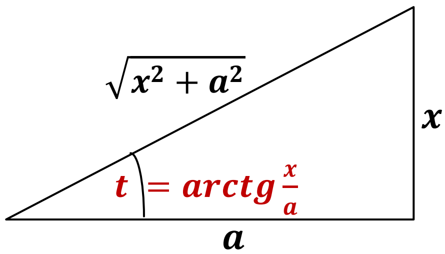
$$\int \frac{cos\, t}{cos^2 t}dt \;=\; ln\left|\frac{1+\sin t}{\cos t}\right| \quad \textit{as derived in example 1}$$

$$= \frac{\sin t}{cos^2 t} - \frac{1}{2}\left(\frac{\sin t}{cos^2 t} - ln\left|\frac{1+\sin t}{\cos t}\right|\right) \;=\; \frac{\sin t}{cos^2 t} - \frac{1}{2}\frac{\sin t}{cos^2 t} + \frac{1}{2}ln\left|\frac{1+\sin t}{\cos t}\right| \;=$$

$$= \frac{1}{2}\frac{sin\, t}{cos^2 t} + \frac{1}{2}ln\left|\frac{1+sin\, t}{cos\, t}\right| \;=$$

המשך בעמוד הבא

$$\sin t = \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} \qquad \cos t = \frac{a}{\sqrt{x^2+a^2}}$$



$$= \frac{1}{2}\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\cdot\frac{x^2+a^2}{a^2} + \frac{1}{2}ln\left|\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}}{\frac{a}{\sqrt{x^2+a^2}}}\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{a^2} + \frac{1}{2}ln\left|\frac{\sqrt{x^2+a^2}+x}{a}\right| = \int\frac{1}{\cos^3 t}dt$$

$$\int\sqrt{x^2+a^2}dx = a^2\int\frac{1}{\cos^3 t}dt = \frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2} + \frac{a^2}{2}ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{a}\right| =$$

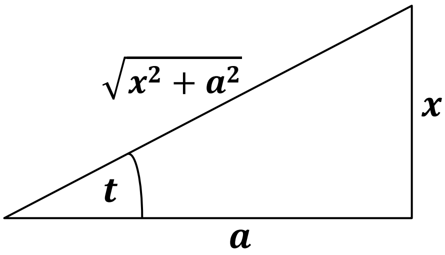
$$= \frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2} + \frac{a^2}{2}ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| - ln|a| + c$$

לסיכום:

$$\int\sqrt{x^2+a^2}dx = \frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2} + \frac{a^2}{2}ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + C$$

דוגמה 4: חשב את $\int \frac{1}{x^2+a^2}dx$

מזהה באינטגרנד x^2+a^2 ומבין שזהו ריבועו של יתר במשולש ישר זווית אשר בו x ו- a הם ניצבים.



מסמן ב- t את הזווית שמול הניצב x.

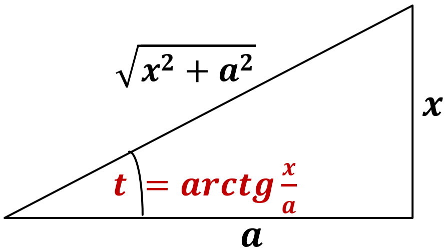
מטריגו בסיסי מבין ש- $\sqrt{x^2+a^2}=\frac{a}{\cos t} \quad => \quad x^2+a^2=\frac{a^2}{\cos^2 t}$

אבל מה להציב במקום dx ? ובכן, מבין גם ש- $x=a\tan t$

$$x=a\tan t \quad => \quad \frac{dx}{dt}=\frac{a}{\cos^2 t} \quad => \quad dx=\frac{a}{\cos^2 t}dt$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \int \frac{\cos^2 t}{a^2}\cdot\frac{a}{\cos^2 t}dt = \frac{1}{a}\int dt = \frac{1}{a}\int dt = \frac{1}{a}t = \frac{1}{a}arctg\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{a}\,arctg\frac{x}{a}+C$$



הדוגמה ההופכית, $\int(x^2+a^2)dx$, היא אינטגרל מיידי של פולינום:

$$\int(x^2+a^2)dx = \frac{1}{3}x^3+a^2x+C$$