גבולות:

1. חישובי גבולות ללא לופיטל (אם לא קיים הגבול, יש להסביר מדוע הוא לא קיים): 30 נקו' (כ"א 10 נקו')

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{2x}(x-1)}{|x-1|} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

פיתרון:

כאשר $1 < x$ אין לערך המוחלט משמעות, ואפשר לסלקו.

כאשר $x < 1$ יש לערך המוחלט משמעות, וכדי לסלקו יש לכפול את הארגומנט ב- (-1).

$$f_{(x)} = \begin{cases} \frac{\sqrt{2x}(x-1)}{x-1} & , \quad 1 < x \\ \frac{\sqrt{2x}(x-1)}{-(x-1)} & , \quad 0 \le x < 1 \end{cases} \quad => \quad f_{(x)} = \begin{cases} \sqrt{2x} & , \quad 1 < x \\ -\sqrt{2x} & , \quad 0 \le x < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1^+} f_{(x)} = \lim_{x\to 1^+}\sqrt{2x} = \sqrt{2} \quad , \quad \lim_{x\to 1^-} f_{(x)} = \lim_{x\to 1^-} -\sqrt{2x} = -\lim_{x\to 1^-}\sqrt{2x} = -\sqrt{2}$$

ערך הגבול משמאל שונה מערך הגבול מימין: $\lim_{x\to 1^-} f_{(x)} \ne \lim_{x\to 1^+} f_{(x)}$ ולכן לא קיים הגבול.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin(x))}{5x} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

פיתרון:

זווית (ברדיאנים) תמיד גדולה מהסינוס שלה, ז"א $\sin(x) < x$. כאשר היא קטנה מאוד, היא גדולה ממנו אך במעט.

כשהיא שואפת לאפס היא כבר "ממש שווה לו", ז"א $\sin(x) \approx x$. אי לכך, אפשר לרשום x במקום $\sin(x)$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin(x))}{5x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{5x} = \frac{1}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = \frac{1}{5}\cdot 1 = \frac{1}{5}$$

$$\lim_{x\to 9}\left(\sqrt{x}-2\right)^{\frac{1}{x-9}} = \left[1^{\pm\infty}\right] \quad => \quad Euler\ (probably)$$

פיתרון:

$$\lim_{x\to 9}\left(\sqrt{x}-2\right)^{\frac{1}{x-9}} = \lim_{x\to 9}\left(\sqrt{x}-2\right)^{\frac{1}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}} = \lim_{x\to 9}\left[\left(\sqrt{x}-2\right)^{\frac{1}{(\sqrt{x}-3)}}\right]^{\frac{1}{(\sqrt{x}+3)}} =$$

$$= \lim_{x\to 9}\left[\left(\sqrt{x}-3+1\right)^{\frac{1}{(\sqrt{x}-3)}}\right]^{\frac{1}{(\sqrt{x}+3)}} = \lim_{x\to 9}\left[\left(1+\sqrt{x}-3\right)^{\frac{1}{(\sqrt{x}-3)}}\right]^{\frac{1}{(\sqrt{x}+3)}} = \lim_{x\to 9}[e]^{\frac{1}{(\sqrt{x}+3)}} = e^{1/6}$$

2. נתונה פונקציה f המקיימת $\mathbf{1} = \mathbf{lim}_{x\to-2}\frac{f(x)}{x^2}$. מצאו את הגבולות הבאים, 20 נקו' (כ"א 10 נקו'):

א. $\lim_{x\to-2} f(x)$

ב. $\lim_{x\to-2}\frac{f(x)}{x}$

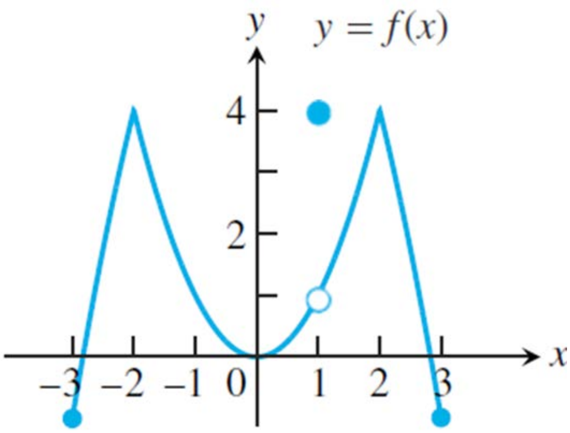
פיתרון:

$$\lim_{x\to-2}\frac{f(x)}{x^2}=1 \quad => \quad \frac{\lim\limits_{x\to-2} f(x)}{\lim\limits_{x\to-2} x^2}=1 \quad => \quad \lim_{x\to-2} f(x)=\lim_{x\to-2} x^2=(-2)^2=4$$

$$\lim_{x\to-2}\frac{f(x)}{x}=\frac{\lim\limits_{x\to-2} f(x)}{\lim\limits_{x\to-2} x} = \frac{4}{-2} = -2$$

רציפות וגזירות:

3. נתון גרף של פונקציה:



א. היכן הפונקציה אינה רציפה (התייחס לנקודות בתחום ההגדרה בלבד)? נמק. 10 נקו'

תשובה:

הפונקציה אינה רציפה ב- $\mathbf{1} = x$ כי בנקודה זו ערך הגבול שונה מערך הפונקציה: $\mathbf{lim}_{x\to1} f(x) = \mathbf{1} \neq f_{(1)} = \mathbf{4}$

ב. היכן הפונקציה אינה גזירה (התייחס לנקודות בתחום ההגדרה בלבד)? נמק. 10 נקו'

תשובה:

הפונקציה אינה גזירה ב- $\mathbf{1} = x$ כי אינה רציפה בנקודה זו.

היא אינה גזירה גם בנקודות $\pm\mathbf{2} = x$ בשל "שפיץ", ז"א, ערך הנגזרת משמאל ומימין אינו זהה:

$$\mathbf{lim}_{x\to\pm2^-} f'_{(x)} \neq \mathbf{lim}_{x\to\pm2^+} f'_{(x)}$$

ג. השלם את הייצוג האלגברי של הפונקציה: $f(x)=\begin{cases} 8-x^2 & , \quad \_\_ \\ x^2 & , \quad \_\_ \\ \_\_ & , \quad x=1 \\ \_\_ & , \quad \_\_ \\ \_\_ & , \quad \_\_ \end{cases}$ 10 נקו'

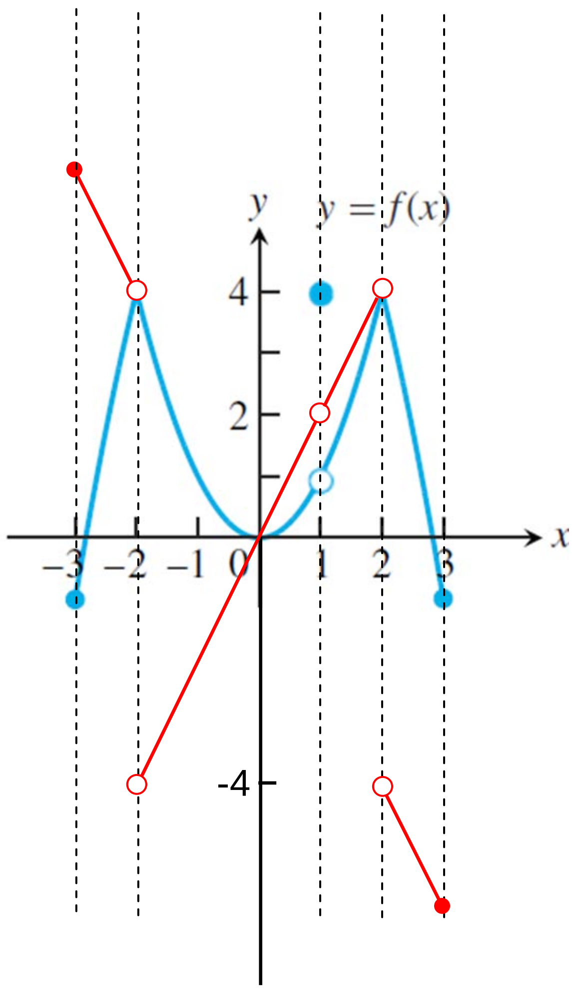
פיתרון:

$$\boldsymbol{f_{(x)}=\begin{cases} 8-x^2 & , & -3\le x\le -2 \\ x^2 & , & -2<x<1 \\ 4 & , & x=1 \\ x^2 & , & 1<x<2 \\ 8-x^2 & , & 2\le x\le 3 \end{cases}}$$

ד. חשב את הנגזרת בתחום שבו הפונקציה גזירה (10 נקו'). שרטט את גרף הנגזרת (10 נקו').

פיתרון (גרף הנגזרת באדום):

$$\boldsymbol{f'_{(x)}=\begin{cases} -2x & , & -3\le x<-2 \\ 2x & , & -2<x<1 \\ 2x & , & 1<x<2 \\ -2x & , & 2<x\le 3 \end{cases}}$$



4. שאלת בונוס: הבנת הנגזרת. מקסימום בונוס של 8 נקודות. כל תשובה נכונה מזכה בנקודה אחת.

ברגע t=0 נפתח ברז בתחתיתו של מיכל. המים מתרוקנים במשך 50 דקות לפי הביטוי, $V(t) = 200{,}000(1-\frac{t}{50})^2$.

חישבנו בכיתה את,

א. הנגזרת של הביטוי בדקה ה-30 וקיבלנו מינוס 3,200 ליטרים לדקה.

ב. קצב ההתרוקנות הממוצע בין הדקה ה-30 לדקה ה-31 וקיבלנו מינוס 3,120 ליטרים לדקה.

ג. קצב ההתרוקנות הממוצע בין הדקה ה-30 לשנייה הסמוכה אליה (30 + 1/60) וקיבלנו מינוס 3,198.7 ליטרים לדקה.

1. האם נכון לומר כי קצב ההתרוקנות הממוצע של המים הוא 4,000 ליטרים לדקה, כלומר, שבכל דקה משתחררים מהמיכל 4000 ליטרים בממוצע (נכון/לא נכון).

תשובה: נכון. בתחילה נפח המים במיכל הינו 200,000 ליטרים ולבסוף, לאחר 50 דקות, 0 ליטרים:

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{0-200{,}000}{50} = -4{,}000\ liter/min$$

2. קצב ההתרוקנות נמוך בהתחלה וגדל עם הזמן (נכון/לא נכון).

תשובה: לא נכון, להיפך. בהתחלה ערכה **המוחלט** של הנגזרת הינו גדול (קצב התרוקנות גבוה), והוא קטן עם חלוף הזמן:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}\left[200{,}000(1-\frac{t}{50})^2\right] = 400{,}000\left(1-\frac{t}{50}\right)\left(-\frac{1}{50}\right) = -8000\left(1-\frac{t}{50}\right) => \left|\frac{dV}{dt}\right| = 8000\left(1-\frac{t}{50}\right)$$

3. אם נפתח סוגריים בביטוי הנתון, נקבל $V(t) = 80t^2 - 8000t + 200{,}000$. אם הנגזרת של t^2 היא $2t + \Delta t$ ונציב בה $t = 30$, $\Delta t = 1$ דקות, נקבל כי שיפועו של המשיק בדקה ה-30 הוא מינוס 3,120 ליטרים לדקה או כי שיפועו של המיתר בין הדקה ה-30 לדקה ה-31 הוא מינוס 3,120 ליטרים לדקה (מי משניהם נכון, הראשון או השני?)

תשובה:

השני נכון. Δt אינו שואף לאפס ולכן מדובר בשיפוע הממוצע לרוחב האינטרוול שבין סוף הדקה ה-30 לבין סוף הדקה ה-31 .

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{V(t+\Delta t)-V(t)}{\Delta t} = \frac{80(t+\Delta t)^2 - 8000(t+\Delta t) + 200{,}000 - [80t^2 - 8000t + 200{,}000]}{\Delta t} =$$

$$= \frac{80(t+\Delta t)^2 - 8000(t+\Delta t) - 80t^2 + 8000t}{\Delta t} = \frac{80(t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2) - 8000\Delta t - 80t^2}{\Delta t} =$$

$$= \frac{160t\Delta t + 80\Delta t^2 - 8000\Delta t}{\Delta t} = 160t + 80\Delta t - 8000 = 80(2t + \Delta t - 100)\ liter/min$$

$$\left.\frac{\Delta V}{\Delta t}\right|_{\substack{t=30\\ \Delta t=1}} = 80(2\cdot 30 + 1 - 100) = -3120\ liter/min$$

4. נחזור על הסעיף הקודם, אך נציב הפעם $t = 30$, $\Delta t = 1/60$ דקות. נקבל כי שיפועו של המשיק בדקה ה-30 הוא מינוס 3,198.7 ליטרים לדקה או כי שיפועו של המיתר בין הדקה ה-30 לשנייה הסמוכה אליה (30 + 1/60) הוא מינוס 3,198.7 ליטרים לדקה (מי משניהם נכון, הראשון או השני?)

תשובה:

השני נכון. Δt אינו שואף לאפס ולכן מדובר בשיפוע הממוצע לרוחב האינטרוול שבין סוף הדקה ה-30 לבין סוף השנייה הבאה .

$$\left.\frac{\Delta \boldsymbol{V}}{\Delta \boldsymbol{t}}\right|_{\substack{t=30\\ \Delta t=1/60}} = \mathbf{80(2\cdot 30+1/60-100)} = \mathbf{-3,198.7}\ \boldsymbol{liter/min}$$

5. בשני הסעיפים הקודמים קיבלנו את אותן התוצאות שקיבלנו בכיתה, למרות שבכיתה לא השתמשנו במתודולוגיה של הגדרת הנגזרת אלא חישבנו ישירות את שיפועו של מיתר בין שתי נקודות. הדבר אינו מפתיע, כי בשתי המתודולוגיות מבוצעת אותה הפעולה בדיוק (כל עוד לא הזנחנו את Δt) - חישוב קצב ההתרוקנות הממוצע בין שתי נקודות (נכון/לא נכון).

תשובה:

נכון. בשתי השיטות משתמשים למעשה באותה נוסחה - הנוסחה לחישוב שיפועו של ישר:

$$\boldsymbol{m} = \frac{\Delta \boldsymbol{V}}{\Delta \boldsymbol{t}} = \frac{\boldsymbol{V(t+\Delta t)-V(t)}}{\Delta \boldsymbol{t}}$$

6. במהלך אותה שנייה, בין הדקה ה-30 לשנייה הסמוכה אליה, יתרוקנו מן המיכל 53.3 ליטרים (נכון/לא נכון).

תשובה: נכון. בין סוף הדקה ה-30 לבין סוף השנייה הבאה יתרוקנו מן המיכל 53.3 ליטרים.

$$\boldsymbol{V_{(t)}} = \mathbf{80}\boldsymbol{t}^{\mathbf{2}} - \mathbf{8000}\boldsymbol{t} + \mathbf{200,000} \quad =>$$

$$\boldsymbol{V_{(30+1/60)}} = \mathbf{80(30+1/60)^2 - 8000(30+1/60) + 200,000 \approx 31,946.7}\ \boldsymbol{liter}$$

$$\boldsymbol{V_{(30)}} = \mathbf{80(30)^2 - 8,000(30) + 200,000 = 32,000}\ \boldsymbol{liter}$$

$$\Delta \boldsymbol{V}\Big|_{\substack{t=30\\ \Delta t=1/60}} = \boldsymbol{V_{(30+1/60)} - V_{(30)}} = \mathbf{31,946.7 - 32,000} = \mathbf{-53.3}\ \boldsymbol{liter}$$

7. אם בדקה ה-30 ($t = 30$) נוסיף מים למיכל בעזרת צינור חיצוני, בקצב של 3200 ליטרים לדקה, אז נפח המים במיכל יתייצב על 32,000 ליטרים (נכון/לא נכון).

תשובה: נכון. בסוף הדקה ה-30 מתרוקנים המים בקצב של 3200 ליטרים לדקה:

$$\frac{\boldsymbol{dV}}{\boldsymbol{dt}} = -\mathbf{8000}\left(\mathbf{1}-\frac{\boldsymbol{t}}{\mathbf{50}}\right) \quad => \quad \left.\frac{\boldsymbol{dV}}{\boldsymbol{dt}}\right|_{t=30} = -\mathbf{8000}\left(\mathbf{1}-\frac{\mathbf{30}}{\mathbf{50}}\right) = \mathbf{-3,200}\ \boldsymbol{liter/min}$$

הוספת מים למיכל **בדיוק** בקצב שבו הוא מתרוקן, מייצבת את נפח המים שבו.

מרגע זה ואילך הפונקציה $\boldsymbol{V(t)} = \mathbf{200,000}(\mathbf{1}-\frac{\boldsymbol{t}}{\mathbf{50}})^{\mathbf{2}}$ איננה רלוונטית עוד, למרות שקצב יציאת המים נגזר ממנה.

8. בהנחה שלפני תחילת ההתרוקנות היו במיכל 200,000 ליטרים ובהנחה שאחרי ההתרוקנות לא נותרו בו מים, אז הפונקציה גזירה ב- $t = 0$ ואינה גזירה ב- $t = 50$ (נכון/לא נכון).

תשובה: לא נכון.

הפונקציה אינה גזירה ב- $\boldsymbol{t = 0}$ ("שפיץ" בין ישר אופקי לפרבולה) וגזירה ב- $\boldsymbol{t = 50}$ (מעבר "חלק" בין פרבולה לישר אופקי).