חורף 2013 – מועד א'

א. מצא את הגבול של $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^{3/2}}\int_0^{\sqrt{x}}\frac{t^2}{t^4+1}dt$

ב. מצא את הפונקציה הקדומה של $\frac{1}{\cos x}$

פיתרון א' :

לחשב את $\int_0^{\sqrt{x}}\frac{t^2}{t^4+1}dt$ זה מסובך. מאידך, ערך האינטגרל שואף כאן לאפס כי גבול עליון ← גבול תחתון.

כשכותבים את הגבול הנתון כך: $\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{\sqrt{x}}\frac{t^2}{t^4+1}dt}{x^{3/2}}$, קל לראות שמתקבל $\left[\frac{0}{0}\right]$ כך שאפשר להפעיל את כלל לופיטל:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{\sqrt{x}}\frac{t^2}{t^4+1}dt}{x^{3/2}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}\int_0^{\sqrt{x}}\frac{t^2}{t^4+1}dt}{\frac{d}{dx}x^{3/2}}$$

גזירת המונה תתבצע על פי המשפט היסודי: $\frac{d}{dx}\int_0^x f_{(t)}\,dt=f_{(x)}$. כאן $f_{(t)}=\frac{t^2}{t^4+1}$.

במקרה דנן הגבול העליון אינו x אלא $\sqrt{x}$, כך ש- $y=\int_0^{\sqrt{x}}f_{(t)}\,dt$ מורכבת בעצם משתי פונקציות :

$y=\int_0^u f_{(t)}\,dt$ ו- $u=\sqrt{x}$. כדי למצוא את $\frac{dy}{dx}$ יש להחיל את כלל השרשרת : $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$

$$\frac{d}{dx}\int_0^{\sqrt{x}}\frac{t^2}{t^4+1}dt=\frac{d}{du}\int_0^u f_{(t)}\,dt\cdot\frac{d}{dx}[u]=f_{(u)}\cdot\frac{d}{dx}[u]=\frac{u^2}{u^4+1}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{x}{x^2+1}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{\sqrt{x}}\frac{t^2}{t^4+1}dt}{x^{3/2}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}\int_0^{\sqrt{x}}\frac{t^2}{t^4+1}dt}{\frac{d}{dx}(x^{3/2})}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{x^2+1}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{3}{2}\sqrt{x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{3\sqrt{x}(x^2+1)2\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{3x(x^2+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{3(x^2+1)}=\frac{1}{3}$$

ב. מצא את הפונקציה הקדומה של $\frac{1}{\cos x}$

$$F_{(x)} = \int \frac{1}{\cos x}dx = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}dx \rightarrow \begin{cases} u = \sin x \\ du = \cos x \cdot dx \end{cases}$$

$$\int \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}dx = \int \frac{1}{1-u^2}du = \int \frac{1}{(1-u)(1+u)}du = \int \left(\frac{A}{1-u} + \frac{B}{1+u}\right)du$$

באמצעות פירוק לשברים חלקיים נמצא את A ו-B ובכך נעבור מאינטגרל מסובך של מכפלה לאינטגרל פשוט של סכום.

פירוק האינטגרנד לשברים חלקיים:

$$\frac{1}{(1-u)(1+u)} = \frac{A}{1-u} + \frac{B}{1+u} = \frac{A(1+u)+B(1-u)}{(1-u)(1+u)} = \frac{(A-B)u+A+B}{(1-u)(1+u)}$$

$$1 = (A-B)u + A + B \quad => \quad \begin{cases} A - B = 0 \\ A + B = 1 \end{cases} \quad => \quad 2A = 1 \quad => \quad A = \frac{1}{2} \quad => \quad B = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{(1-u)(1+u)} = \frac{\frac{1}{2}}{1-u} + \frac{\frac{1}{2}}{1+u} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u+1} - \frac{1}{u-1}\right)$$

בשלב האחרון דאגנו לכך שנגזרת המכנה תהייה 1. נמנעת כך הטעות של "שכחתי לחלק בנגזרת הפנימית".

כעת אפשר לרשום את האינטגרל כאינטגרל של סכום (הפרש במקרה דנן) במקום כאינטגרל של מכפלה:

$$\int \frac{1}{(1-u)(1+u)}du = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{u+1} - \frac{1}{u-1}\right)du = \frac{1}{2}(ln|u+1| - ln|u-1|) =$$

$$= \frac{1}{2}ln\left|\frac{u+1}{u-1}\right| = \frac{1}{2}ln\left|\frac{\sin x+1}{\sin x-1}\right| = \frac{1}{2}ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x} = ln\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$$

לסיכום:

$$F_{(x)} = \int \frac{1}{\cos x}dx = ln\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}} + C$$