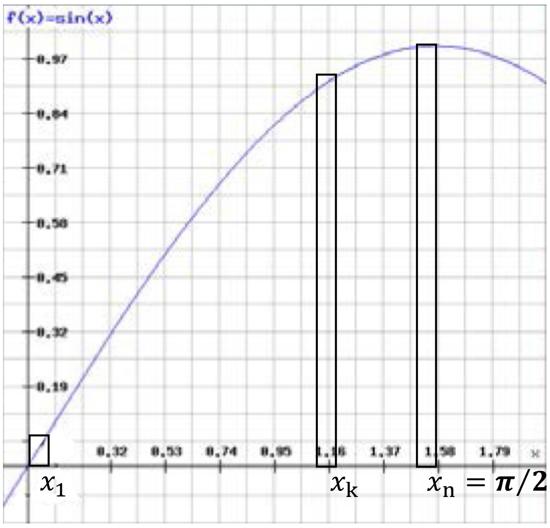
השתמש בנוסחה $sin(h)+sin(2h)+\cdots+sin(mh)=\frac{cos(h/2)-cos[(m+1/2)h]}{2sin(h/2)}$ כדי למצוא את השטח שמתחת לעקומה

$y=\sin x$ בין $x=0$ ל- $x=\pi/2$ בשני שלבים:



א. חלק את התחום $[0,\pi/2]$ ל- n מלבנים שווים ברוחבם וחשב את U, שהוא הערך המרבי של סכום שטחי המלבנים .

ב. מצא את הגבול של U כאשר $n\to\infty$ ו- $\Delta x=\frac{b-a}{n}$

ג. הראה כי $\int_0^{\pi/2}\sin x\,dx$ הוא סכום רימן

פיתרון:

א. נחלק את האינטרוול $[a,b]$ ל- n תת-אינטרוולים שווים. רוחבו של כל תת-אינטרוול הוא Δx , ואם כך $\Delta x=\frac{b-a}{n}$.
במקרה דנן $b=\pi/2$ ו- $a=0$ (כרגיל) . מאחר שהקצה השמאלי של האינטרוול הוא $x_0=a=0$, מתקבל :

$$x_1=\Delta x \quad , \quad x_2=2\Delta x \quad , \quad x_3=3\Delta x \ ,\dots\dots, x_k=k\Delta x \ ,\dots\dots\dots, \quad x_{n-1}=(n-1)\Delta x \quad , \quad x_n=n\Delta x=b$$

x_k הוא **קצהו הימני** של תת-האינטרוול ה-"k"י - ז"א מדובר ב- U (כרגיל), ולכן $f_{(x_k)}$ הוא גובהו של המלבן ה-"k"י .
רוחבו של כל מלבן הוא Δx , ולכן שטחו של המלבן ה-"k"י הוא $A_k=f_{(x_k)}\cdot\Delta x$. נרשום זאת באופן מפורט:

$$A_1 = f_{(X_1)}\cdot\Delta x = sin\,(x_1)\cdot\Delta x = sin\,(1\cdot\Delta x)\cdot\Delta x$$

$$A_2 = f_{(X_2)}\cdot\Delta x = sin\,(x_2)\cdot\Delta x = sin\,(2\cdot\Delta x)\cdot\Delta x$$

$$A_3 = f_{(X_3)}\cdot\Delta x = sin\,(x_3)\cdot\Delta x = sin\,(3\cdot\Delta x)\cdot\Delta x$$

.

.

$$A_k = f_{(X_k)}\cdot\Delta x = sin\,(x_k)\cdot\Delta x = sin\,(k\cdot\Delta x)\cdot\Delta x$$

.

.

$$A_n = f_{(X_n)}\cdot\Delta x = sin\,(x_n)\cdot\Delta x = sin\,(n\cdot\Delta x)\cdot\Delta x$$

נסכום כעת את שטחי n המלבנים, תוך שאנו זוכרים כי $\Delta x=\frac{b-a}{n}=\frac{b}{n}$:

$$U = S_n = \sum_{k=1}^{n} f_{(X_k)}\cdot\Delta x = \sum_{k=1}^{n} sin\,(k\cdot\Delta x)\cdot\Delta x = \Delta x\cdot\sum_{k=1}^{n} sin\,(k\cdot\Delta x) =$$

$$= \Delta x\cdot\frac{cos(\Delta x/2)-cos[(n+1/2)\Delta x]}{2sin(\Delta x/2)} = \frac{\Delta x}{2}\cdot\frac{cos(\Delta x/2)-cos(n\cdot\Delta x+\Delta x/2)}{sin(\Delta x/2)} =$$

$$= \frac{b}{2n}\cdot\frac{cos(b/2n)-cos(b+b/2n)}{sin(b/2n)} = \frac{\pi}{4n}\cdot\frac{cos(\pi/4n)-cos(\pi/2+\pi/4n)}{sin(\pi/4n)} =$$

$$= \frac{\pi}{4n}\cdot\frac{cos(\pi/4n)+sin(\pi/4n)}{sin(\pi/4n)} = t\cdot\frac{cos(t)+sin(t)}{sin(t)} = \frac{cos(t)+sin(t)}{\frac{sin(t)}{t}}$$

ב.

קיבלנו נוסחה לסכום שטחי המלבנים - S_n , כתלות במספרם - n (הצבנו $t = \frac{\pi}{4n}$ רק לשם הנוחות).
שטח זה גדול כמובן מהשטח המבוקש שתחת הגרף $y = \sin x$ (ראה ציור), אבל אם נשאיף את מספר המלבנים לאינסוף ($n \to \infty \;=>\; t \to 0$) , ישאף רוחבו של כל מלבן לאפס וכך גם השגיאה, כי לא תישארנה "פינות בולטות" :

$$\lim_{t\to 0} S_n \quad = \quad \lim_{t\to 0} \frac{\cos(t) + \sin(t)}{\frac{\sin(t)}{t}} \quad = \quad \frac{\cos(0) + \sin(0)}{1} \quad = \quad \frac{1+0}{1} \quad = \quad 1\,[Area\ Units]$$

ג.

$$\int_0^{\pi/2} \sin x\, dx \quad = \quad -\cos x \Big|_0^{\pi/2} \quad = \quad -[\cos(\pi/2) - \cos(0)] \quad = \quad -[0-1] \quad = \quad 1\,[Area\ Units]$$

את המקום שנשאר בדף ננצל כדי להראות מדוע $\cos(\pi/2 + \alpha) \;=\; -\sin(\alpha)$, הזהות בה השתמשנו בפתרון סעיף א' .

אנו רואים ש- $\cos(\pi/2 + \alpha)$ פונה שמאלה (שלילי) בעוד $\sin(\alpha)$ פונה מעלה (חיובי). מכאן שהם נגדיים (הפוכי סימן).

כמו כן אנו רואים שגודליהם שווים, מטעמי סימטריה.

תזכורת :

היטל המחוג על הציר האופקי הוא הקוסינוס של הזווית (אדום).

היטל המחוג על הציר האנכי הוא הסינוס של הזווית (כחול).