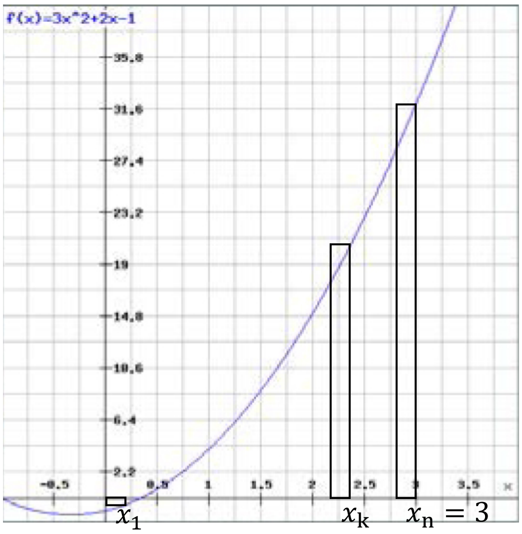

חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $y = 3x^2 + 2x - 1$ לבין ציר X בתחום שבין $x = 0$ לבין $x = 3$ תוך שימוש בסכום רימן. נתון כי

$$\sum_1^n i = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{וכן} \quad \sum_1^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

פיתרון:

נחלק את האינטרוול $[0, b]$ ל- n תת-אינטרוולים שווים (כאן $b = 3$).

רוחבו של כל תת-אינטרוול הוא Δx, ואם כך $\Delta x = \frac{b-0}{n} = \frac{b}{n}$.

מאחר שהקצה השמאלי של האינטרוול הוא $x_0 = 0$, מתקבל

$$x_1 = \Delta x \quad , \quad x_2 = 2\Delta x \quad , \quad x_3 = 3\Delta x \quad , \dots\dots , x_k = k\Delta x \quad , \dots\dots\dots , \quad x_{n-1} = (n-1)\Delta x \quad , \quad x_n = n\Delta x = b$$

x_k הוא קצהו הימני של תת-האינטרוול ה-"k", ולכן $f_{(x_k)}$ הוא גובהו של המלבן ה-"k" (מתוך n מלבנים שהתקבלו).

רוחבו של כל מלבן הוא Δx, ולכן שטחו של המלבן ה-"k" הוא $A_k = f_{(x_k)} \cdot \Delta x$. נרשום זאת באופן מפורט:

$$A_1 = f_{(X_1)} \cdot \Delta x = \left(3{x_1}^2 + 2x_1 - 1\right) \cdot \Delta x = \left[3(1\Delta x)^2 + 2(1\Delta x) - 1\right] \cdot \Delta x = \quad 3 \cdot 1^2 \cdot (\Delta x)^3 + 2 \cdot 1 \cdot (\Delta x)^2 - \Delta x$$

$$A_2 = f_{(X_2)} \cdot \Delta x = \left(3{x_2}^2 + 2x_2 - 1\right) \cdot \Delta x = \left[3(2\Delta x)^2 + 2(2\Delta x) - 1\right] \cdot \Delta x = \quad 3 \cdot 2^2 \cdot (\Delta x)^3 + 2 \cdot 2 \cdot (\Delta x)^2 - \Delta x$$

$$A_3 = f_{(X_3)} \cdot \Delta x = \left(3{x_3}^2 + 2x_3 - 1\right) \cdot \Delta x = \left[3(3\Delta x)^2 + 2(3\Delta x) - 1\right] \cdot \Delta x = \quad 3 \cdot 3^2 \cdot (\Delta x)^3 + 2 \cdot 3 \cdot (\Delta x)^2 - \Delta x$$

.

$$A_k = f_{(X_k)} \cdot \Delta x = \left(3{x_k}^2 + 2x_k - 1\right) \cdot \Delta x = \left[3(k\Delta x)^2 + 2(k\Delta x) - 1\right] \cdot \Delta x = \quad 3 \cdot k^2 \cdot (\Delta x)^3 + 2 \cdot k \cdot (\Delta x)^2 - \Delta x$$

.

$$A_n = f_{(X_n)} \cdot \Delta x = \left(3{x_n}^2 + 2x_n - 1\right) \cdot \Delta x = \left[3(n\Delta x)^2 + 2(n\Delta x) - 1\right] \cdot \Delta x = \quad 3 \cdot n^2 \cdot (\Delta x)^3 + 2 \cdot n \cdot (\Delta x)^2 - \Delta x$$

נסכום כעת את שטחי n המלבנים, תוך שאנו זוכרים כי $\Delta x = \frac{b}{n}$:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f_{(X_k)} \cdot \Delta x \;=\; \sum_{k=1}^{n} \left[3 \cdot k^2 \cdot (\Delta x)^3 + 2 \cdot k \cdot (\Delta x)^2 - \Delta x\right] \;=\; \sum_{k=1}^{n} 3k^2(\Delta x)^3 + \sum_{k=1}^{n} 2k(\Delta x)^2 \;-\; n \cdot \Delta x \;=$$

$$= 3(\Delta x)^3 \sum_{k=1}^{n} k^2 \;+\; 2(\Delta x)^2 \sum_{k=1}^{n} k \;-\; n \cdot \Delta x \;=\; 3\left(\frac{b^3}{n^3}\right) \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2\left(\frac{b^2}{n^2}\right) \cdot \frac{n(n+1)}{2} - n \cdot \frac{b}{n} =$$

$$= \frac{b^3}{2} \cdot \frac{(n+1)(2n+1)}{n^2} \;+\; b^2 \cdot \frac{n+1}{\text{n}} \;-\; b \;=\; \frac{b^3}{2} \cdot \frac{2n^2 + 3n + 1}{n^2} \;+\; b^2 \cdot \frac{n+1}{\text{n}} \;-\; b \;=$$

$$S_n = \frac{b^3}{2}\left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \;+\; b^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \;-\; b \quad \leftarrow \quad \textit{formula for the sum of } n \textit{ rectangles}$$

נשאיף כעת לאינסוף את מספר המלבנים על מנת למזער את השגיאה - סכום שטחיהם ישתווה לשטח שתחת הגרף:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{b^3}{2}\left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) + b^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) - b\right] = \frac{b^3}{2} \lim_{n\to\infty}\left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) + b^2 \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right) - b =$$

$$= \frac{b^3}{2} \cdot 2 \;+\; b^2 \cdot 1 \;-\; b \;=\; b^3 + b^2 - b \;=\; 3^3 + 3^2 - 3 \;=\; 33\ [\textit{Area Units}]$$