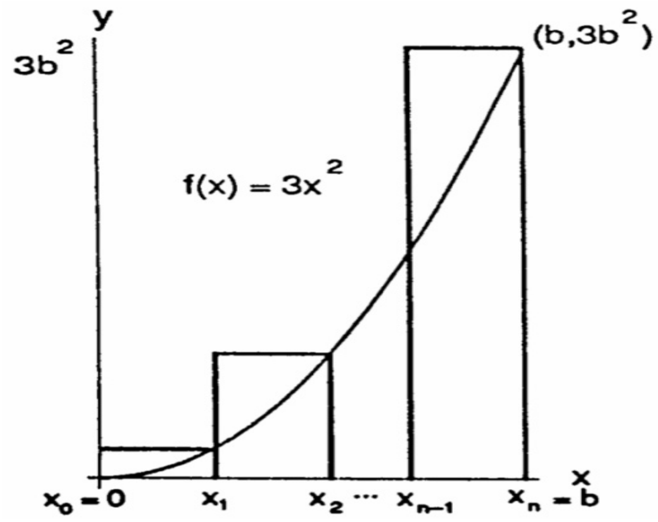
חשב את השטח שבין גרף הפונקציה $y = 3x^2$ וציר ה- X , על האינטרוול $[0,b]$, באמצעות סכום רימן .

פיתרון:



נחלק את האינטרוול $[0,b]$ ל- n תת-אינטרוולים שווים.

רוחבו של כל תת-אינטרוול הוא Δx , ואם כך $\Delta x = \frac{b-0}{n} = \frac{b}{n}$

מאחר שהקצה השמאלי של האינטרוול הוא $x_0 = 0$, מתקבל

$$x_1 = \Delta x \quad , \quad x_2 = 2\Delta x \quad , \quad x_3 = 3\Delta x \ , \ldots\ldots, x_k = k\Delta x \ , \ldots\ldots.\ldots \ , \quad x_{n-1} = (n-1)\Delta x \quad , \quad x_n = n\Delta x = b$$

x_k הוא קצהו הימני של תת-האינטרוול ה-"k-י", ולכן $f_{(x_k)}$ הוא גובהו של המלבן ה-"k-י" (מתוך n מלבנים שהתקבלו - ראה ציור). רוחבו של כל מלבן הוא Δx , ולכן שטחו של המלבן ה-"k-י" הוא $A_k = f_{(x_k)} \cdot \Delta x$. נרשום זאת באופן מפורט:

$$A_1 = f_{(X_1)} \cdot \Delta x = 3{x_1}^2 \cdot \Delta x = 3(1 \cdot \Delta x)^2 \cdot \Delta x = 3(1)^2 \cdot (\Delta x)^3$$

$$A_2 = f_{(X_2)} \cdot \Delta x = 3{x_2}^2 \cdot \Delta x = 3(2 \cdot \Delta x)^2 \cdot \Delta x = 3(2)^2 \cdot (\Delta x)^3$$

$$A_3 = f_{(X_3)} \cdot \Delta x = 3{x_3}^2 \cdot \Delta x = 3(3 \cdot \Delta x)^2 \cdot \Delta x = 3(3)^2 \cdot (\Delta x)^3$$

.
.
.

$$A_k = f_{(X_k)} \cdot \Delta x = 3{x_k}^2 \cdot \Delta x = 3(k \cdot \Delta x)^2 \cdot \Delta x = 3(k)^2 \cdot (\Delta x)^3$$

.
.
.

$$A_n = f_{(X_n)} \cdot \Delta x = 3{x_n}^2 \cdot \Delta x = 3(n \cdot \Delta x)^2 \cdot \Delta x = 3(n)^2 \cdot (\Delta x)^3$$

נסכום כעת את שטחי n המלבנים, תוך שאנו זוכרים כי $\Delta x = \frac{b}{n}$:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f_{(X_k)} \cdot \Delta x = \sum_{k=1}^{n} 3k^2 \cdot (\Delta x)^3 = 3(\Delta x)^3 \cdot \sum_{k=1}^{n} k^2 = 3\left(\frac{b^3}{n^3}\right) \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} =$$

$$= \frac{b^3}{2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{n^3} = \frac{b^3}{2} \cdot \frac{(n+1)(2n+1)}{n^2} = \frac{b^3}{2} \cdot \frac{2n^2+3n+1}{n^2} = \frac{b^3}{2}\left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$$

קיבלנו נוסחה לסכום שטחי המלבנים - S_n , כתלות במספרם - n . שטח זה גדול כמובן מהשטח המבוקש שתחת הגרף $y = 3x^2$ (ראה ציור), אבל אם נשאיף את מספר המלבנים לאינסוף, $n \to \infty$, ישאף רוחבו של כל מלבן לאפס, $\Delta x \to 0$, ואז תשאף גם השגיאה לאפס כי לא תישארנה "פינות בולטות" :

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{b^3}{2}\left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{b^3}{2} \lim_{n\to\infty}\left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = b^3$$