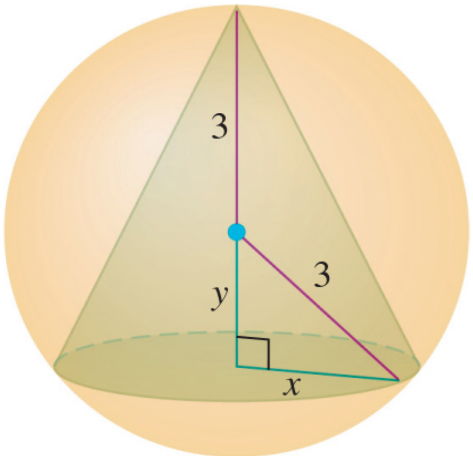


מצא את נפחו של החרוט הגדול ביותר שניתן לחסום בכדור שרדיוסו **3**.

פיתרון:

הנוסחה לנפח חרוט היא $V = \frac{1}{3}A \cdot h$ כאשר **A** הוא שטח בסיס החרוט ו- **h** הוא גובה החרוט. לפיכך נרשום, על פי הציור שמשמאל,

$$V_{(x,y)} = \frac{1}{3}\pi x^2(y+3)$$

אנו רוצים לקבל את $V_{(x)}$, אז נשתמש במשפט פיתגורס כדי לבטא את Y באמצעות X :

$$x^2 + y^2 = 3^3 \quad => \quad y_{(x)} = \sqrt{9-x^2}$$

$$V_{(x,y)} = \frac{1}{3}\pi x^2(y+3) \quad => \quad V_{(x)} = \frac{1}{3}\pi x^2\left(\sqrt{9-x^2}+3\right)$$

כעת נגזור את $V_{(x)}$ לפי X , כדי שנוכל לברר באיזה X מתקבל החרוט בעל הנפח המרבי :

$$V_{(x)} = \frac{1}{3}\pi x^2\left(\sqrt{9-x^2}+3\right) \quad => \quad \frac{dV}{dx} = \frac{\pi}{3}\left[2x\left(\sqrt{9-x^2}+3\right) + x^2 \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{9-x^2}}\right] =$$

$$= \frac{\pi}{3}\left[2x\left(\sqrt{9-x^2}+3\right) - \frac{x^3}{\sqrt{9-x^2}}\right] = \frac{\pi x}{3}\left[2\left(\sqrt{9-x^2}+3\right) - \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\right]$$

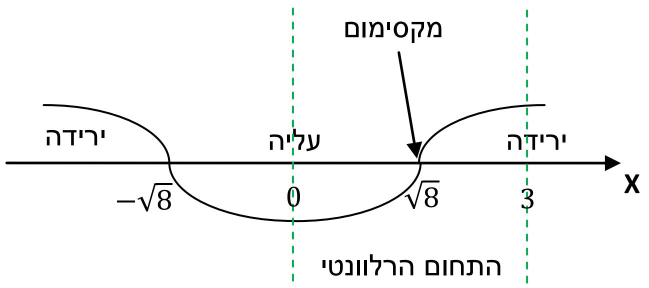
$$\frac{\pi x}{3}\left[2\left(\sqrt{9-x^2}+3\right) - \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\right] > 0 \quad => \quad x\left[2\left((9-x^2)+3\sqrt{9-x^2}\right) - x^2\right] > 0 \quad =>$$

$$=> \quad x\left[18 - 3x^2 + 6\sqrt{9-x^2}\right] > 0 \quad , \quad x > 0 \quad => \quad 18 - 3x^2 + 6\sqrt{9-x^2} > 0 \quad =>$$

$$6 - x^2 + 2\sqrt{9-x^2} > 0 \quad => \quad 2\sqrt{9-x^2} > x^2 - 6 \quad => \quad 4(9-x^2) > (x^2-6)^2 \quad , \quad x^2 = t \quad =>$$

$$=> \quad 4(9-t) > (t-6)^2 \quad => \quad 36 - 4t > t^2 - 12t + 36 \quad => \quad t^2 - 8t < 0 \quad , \quad t > 0 \quad =>$$

$$t - 8 < 0 \quad => \quad x^2 - 8 < 0 \quad => \quad (x-\sqrt{8})(x+\sqrt{8}) < 0 \quad =>$$



אם כך, נפחו של החרוט הגדול ביותר שניתן לחסום בכדור שרדיוסו **3** מתקבל כאשר רדיוס בסיסו של החרוט הוא $\sqrt{8}$ יח' אורך. נפח החרוט המתקבל אז הינו :

$$V_{(x)} = \frac{1}{3}\pi x^2\left(\sqrt{9-x^2}+3\right) \quad => \quad V_{(\sqrt{8})} = \frac{1}{3}\pi \cdot 8\left(\sqrt{9-8}+3\right) = \frac{32\pi}{3}\ cubic\ units$$