א. מצא ביטוי לנגזרת של $y = (lnx)^{\frac{1}{lnx}}$ וחשב את ערכה בנקודה $x = e$ .

ב. מצא את $\int_{ln\frac{\pi}{2}}^{ln\pi} e^x \sin(e^x)dx$

פיתרון א : בפונקציה $y_{(x)} = (lnx)^{\frac{1}{lnx}}$ נציב $u_{(x)} = lnx$ ונקבל $y_{(u)} = (u)^{\frac{1}{u}}$ .

בהמשך נשתמש בכלל השרשרת- $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ , אך ראשית עלינו להתמודד עם $\frac{dy}{du}$ .

כיצד גוזרים פונקציה כמו $y = (u)^{\frac{1}{u}}$ , שבה המשתנה מופיע גם בבסיס וגם במעריך ?

אפשר להפעיל $ln$ על שני האגפים ו"להעביר את החזקה קדימה" - אגף ימין הופך אז למכפלה שאותה אנו יודעים לגזור.

אגף שמאל הופך אומנם מסובך יותר, $lny$ במקום $y$ , אבל אפשר לגוזרו כפונקציה סתומה :

$$y = (u)^{\frac{1}{u}} \quad => \quad ln\, y = ln\, (u)^{\frac{1}{u}} \quad => \quad ln\, y = \frac{1}{u} \cdot ln\, u \quad => \quad \frac{d}{du}(ln\, y) = \frac{d}{du}\left(\frac{1}{u} \cdot ln\, u\right)$$

כעת נבצע את הגזירה בשני האגפים, באגף שמאל גזירה של פונקציה סתומה, ובאגף ימין גזירה של מכפלה :

$$\frac{d}{du}(ln\, y) = \frac{d}{du}\left(\frac{1}{u} \cdot ln\, u\right) \quad => \quad \frac{y'}{y} = \frac{-1}{u^2} \cdot ln\, u + \frac{1}{u} \cdot \frac{1}{u} = \frac{1}{u^2}(1 - ln\, u)$$

אנו יודעים אבל עוד מקודם ש- $y = (u)^{\frac{1}{u}}$ , ואם כך אפשר לרשום את המשוואה הנ"ל באופן הבא :

$$\frac{y'}{(u)^{\frac{1}{u}}} = \frac{1}{u^2}(1 - ln\, u) \quad => \quad y'_{(u)} = \frac{dy}{du} = \frac{(u)^{\frac{1}{u}}}{u^2}(1 - ln\, u) = u^{\frac{1}{u}-2}(1 - ln\, u)$$

קיבלנו את $\frac{dy}{du}$ , חצי שרשרת. נציב כעת $u = lnx$ ואז נכפול ב- $\frac{du}{dx}$ להשלמת השרשרת :

$$\frac{dy}{du} = (lnx)^{\frac{1}{lnx}-2}\left(1 - ln\,(lnx)\right)$$

$$y'_{(x)} = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (lnx)^{\frac{1}{lnx}-2}\left(1 - ln\,(lnx)\right) \cdot \frac{1}{x}$$

כעת אנו יכולים לחשב את ערכה של הנגזרת בנקודה $x = e$ :

$$y'_{(e)} = (lne)^{\frac{1}{lne}-2}\left(1 - ln\,(lne)\right) \cdot \frac{1}{e} = 1\left(1 - ln\,(1)\right) \cdot \frac{1}{e} = \frac{1}{e}$$

פיתרון ב :  בהכנסה לדיפרנציאל (החלפת משתנים).

$$\int_{ln\frac{\pi}{2}}^{ln\pi} sin(e^x)\cdot e^x dx \quad \to \quad \begin{cases} u = e^x \\ du = e^x dx \end{cases} \quad => \quad \begin{matrix} x = ln\frac{\pi}{2} & \to & u = \frac{\pi}{2} \\ x = ln\pi & \to & u = \pi \end{matrix}$$

$$\int_{ln\frac{\pi}{2}}^{ln\pi} sin(e^x)\cdot e^x dx \quad = \quad \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} sin(u)\cdot du \quad = \quad -cos(u)\Big|_{\pi/2}^{\pi} \quad =$$

$$= \quad -[cos(\pi) - cos(\pi/2)] \quad = \quad -[-1-0] \quad = \quad 1$$