THEOREM 1 Limit Laws

If L, M, c and k are real numbers and

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \qquad \text{and} \qquad \lim_{x \to c} g(x) = M, \quad \text{then}$$

1. *Sum Rule*: $\lim_{x \to c} (f(x) + g(x)) = L + M$

The limit of the sum of two functions is the sum of their limits.

2. *Difference Rule*: $\lim_{x \to c} (f(x) - g(x)) = L - M$

The limit of the difference of two functions is the difference of their limits.

3. *Product Rule*: $\lim_{x \to c} (f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M$

The limit of a product of two functions is the product of their limits.

4. *Constant Multiple Rule:* $\lim_{x \to c} (k \cdot f(x)) = k \cdot L$

The limit of a constant times a function is the constant times the limit of the function.

5. *Quotient Rule*: $\lim_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}, \quad M \neq 0$

The limit of a quotient of two functions is the quotient of their limits, provided the limit of the denominator is not zero.

6. *Power Rule*: If r and s are integers with no common factor and $s \neq 0$, then

$$\lim_{x \to c} (f(x))^{r/s} = L^{r/s}$$

provided that $L^{r/s}$ is a real number. (If s is even, we assume that $L > 0$.)

The limit of a rational power of a function is that power of the limit of the function, provided the latter is a real number.

בכללים אלה נשתמש לחישוב גבול של פונקציה שהינה קומבינציה אריתמטית של פונקציות אחרות אשר גבולותיהן ידועים.

Using Limit Rules

37. Suppose $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ and $\lim_{x\to 0} g(x) = -5$. Name the rules in Theorem 1 that are used to accomplish steps (a), (b), and (c) of the following calculation.

$$\lim_{x\to 0} \frac{2f(x) - g(x)}{(f(x)+7)^{2/3}} = \frac{\lim_{x\to 0}(2f(x) - g(x))}{\lim_{x\to 0}(f(x)+7)^{2/3}} \qquad \text{(a)}$$

$$= \frac{\lim_{x\to 0} 2f(x) - \lim_{x\to 0} g(x)}{\left(\lim_{x\to 0}\left(f(x)+7\right)\right)^{2/3}} \qquad \text{(b)}$$

$$= \frac{2\lim_{x\to 0} f(x) - \lim_{x\to 0} g(x)}{\left(\lim_{x\to 0} f(x) + \lim_{x\to 0} 7\right)^{2/3}} \qquad \text{(c)}$$

$$= \frac{(2)(1) - (-5)}{(1+7)^{2/3}} = \frac{7}{4}$$

בשלב א' נעשה שימוש בכלל המנה, האומר שגבול של מנה שווה למנת הגבולות.

בשלב ב' נעשה במונה שימוש בכלל ההפרש, האומר שגבול של הפרש שווה להפרש הגבולות, ובמכנה נעשה שימוש בכלל החזקה, האומר שהגבול של חזקה שווה לחזקה של הגבול.

בשלב ג' נעשה במונה שימוש בכלל המכפלה בקבוע, האומר שהגבול של מכפלת קבוע בפונקציה שווה למכפלת הקבוע בגבול של הפונקציה, ובמכנה נעשה שימוש בכלל הסכום, האומר שגבול של סכום שווה לסכום הגבולות.

39. Suppose $\lim_{x\to c} f(x) = 5$ and $\lim_{x\to c} g(x) = -2$. Find

a. $\lim_{x\to c} f(x)g(x)$

b. $\lim_{x\to c} 2f(x)g(x)$

c. $\lim_{x\to c} (f(x) + 3g(x))$

d. $\lim_{x\to c} \dfrac{f(x)}{f(x) - g(x)}$

Solution:

$$a.\ \lim_{x\to c} f_{(x)} \cdot g_{(x)} = \left[\lim_{x\to c} f_{(x)}\right] \cdot \left[\lim_{x\to c} g_{(x)}\right] = 5 \cdot (-2) = -10$$

$$b.\ \lim_{x\to c} 2f_{(x)} \cdot g_{(x)} = 2\lim_{x\to c} f_{(x)} \cdot g_{(x)} = 2(-10) = -20$$

$$c.\ \lim_{x\to c}\left(f_{(x)} + 3g_{(x)}\right) = \lim_{x\to c} f_{(x)} + \lim_{x\to c} 3g_{(x)} = \lim_{x\to c} f_{(x)} + 3\lim_{x\to c} g_{(x)} = 5 + 3(-2) = -1$$

$$d.\ \lim_{x\to c} \frac{f_{(x)}}{f_{(x)} - g_{(x)}} = \frac{\lim_{x\to c} f_{(x)}}{\lim_{x\to c}\left(f_{(x)} - g_{(x)}\right)} = \frac{\lim_{x\to c} f_{(x)}}{\lim_{x\to c} f_{(x)} - \lim_{x\to c} g_{(x)}} = \frac{5}{5-(-2)} = \frac{5}{7}$$

38. Let $\lim_{x\to1} h(x) = 5$, $\lim_{x\to1} p(x) = 1$, and $\lim_{x\to1} r(x) = 2$. Name the rules in Theorem 1 that are used to accomplish steps (a), (b), and (c) of the following calculation.

$$\lim_{x\to1} \frac{\sqrt{5h(x)}}{p(x)(4-r(x))} = \frac{\lim_{x\to1}\sqrt{5h(x)}}{\lim_{x\to1}(p(x)(4-r(x)))} \qquad \text{(a)}$$

$$= \frac{\sqrt{\lim_{x\to1} 5h(x)}}{\left(\lim_{x\to1} p(x)\right)\left(\lim_{x\to1}\left(4-r(x)\right)\right)} \qquad \text{(b)}$$

$$= \frac{\sqrt{5\lim_{x\to1} h(x)}}{\left(\lim_{x\to1} p(x)\right)\left(\lim_{x\to1} 4 - \lim_{x\to1} r(x)\right)} \qquad \text{(c)}$$

$$= \frac{\sqrt{(5)(5)}}{(1)(4-2)} = \frac{5}{2}$$

בשלב א' נעשה שימוש בכלל המנה, האומר שהגבול של מנה שווה למנת הגבולות.

בשלב ב' נעשה במונה שימוש בכלל החזקה, האומר שהגבול של חזקה שווה לחזקה של הגבול, ובמכנה נעשה שימוש בכלל המכפלה, האומר שהגבול של מכפלה שווה למכפלת הגבולות.

בשלב ג' נעשה במונה שימוש בכלל המכפלה בקבוע, האומר שהגבול של מכפלת קבוע בפונקציה שווה למכפלת הקבוע בגבול של הפונקציה, ובמכנה נעשה שימוש בכלל ההפרש, האומר שגבול של הפרש שווה להפרש הגבולות.

40. Suppose $\lim_{x\to4} f(x) = 0$ and $\lim_{x\to4} g(x) = -3$. Find

a. $\lim_{x\to4}(g(x)+3)$

b. $\lim_{x\to4} xf(x)$

c. $\lim_{x\to4}(g(x))^2$

d. $\lim_{x\to4} \frac{g(x)}{f(x)-1}$

Solution:

$$a.\quad \lim_{x\to4}\left(g_{(x)}+3\right) = \lim_{x\to4} g_{(x)} + \lim_{x\to4} 3 = -3+3 = 0$$

$$b.\quad \lim_{x\to4} x\cdot f_{(x)} = \lim_{x\to4} x \cdot \lim_{x\to4} f_{(x)} = 4\cdot 0 = 0$$

$$c.\quad \lim_{x\to4} g^2_{(x)} = \left[\lim_{x\to4} g_{(x)}\right]^2 = (-3)^2 = 9$$

$$d.\quad \lim_{x\to4}\frac{g_{(x)}}{f_{(x)}-1} = \frac{\lim_{x\to4} g_{(x)}}{\lim_{x\to4}\left(f_{(x)}-1\right)} = \frac{\lim_{x\to4} g_{(x)}}{\lim_{x\to4} f_{(x)} - \lim_{x\to4} 1} = \frac{-3}{0-1} = 3$$

41. Suppose $\lim_{x\to b} f(x) = 7$ and $\lim_{x\to b} g(x) = -3$. Find

a. $\lim_{x\to b} (f(x) + g(x))$ **b.** $\lim_{x\to b} f(x) \cdot g(x)$

c. $\lim_{x\to b} 4g(x)$ **d.** $\lim_{x\to b} f(x)/g(x)$

Solution:

$$a.\ \lim_{x\to b}\left(f_{(x)} + g_{(x)}\right) = \lim_{x\to b} f_{(x)} + \lim_{x\to b} g_{(x)} = 7 + (-3) = 4$$

$$b.\ \lim_{x\to b} f_{(x)} \cdot g_{(x)} = \left[\lim_{x\to b} f_{(x)}\right]\cdot\left[\lim_{x\to b} g_{(x)}\right] = 7\cdot(-3) = -21$$

$$c.\ \lim_{x\to b} 4g_{(x)} = 4\lim_{x\to b} g_{(x)} = 4\cdot(-3) = -12$$

$$d.\ \lim_{x\to b}\frac{f_{(x)}}{g_{(x)}} = \frac{\lim_{x\to b} f_{(x)}}{\lim_{x\to b} g_{(x)}} = \frac{7}{-3} = -\frac{7}{3}$$

42. Suppose that $\lim_{x\to -2} p(x) = 4$, $\lim_{x\to -2} r(x) = 0$, and $\lim_{x\to -2} s(x) = -3$. Find

a. $\lim_{x\to -2} (p(x) + r(x) + s(x))$

b. $\lim_{x\to -2} p(x)\cdot r(x)\cdot s(x)$

c. $\lim_{x\to -2} (-4p(x) + 5r(x))/s(x)$

Solution:

$$a.\ \lim_{x\to -2}\left(p_{(x)} + r_{(x)} + s_{(x)}\right) = \lim_{x\to -2} p_{(x)} + \lim_{x\to -2} r_{(x)} + \lim_{x\to -2} s_{(x)} = 4 + 0 + (-3) = 1$$

$$b.\ \lim_{x\to -2} p_{(x)}\cdot r_{(x)}\cdot s_{(x)} = \left[\lim_{x\to -2} p_{(x)}\right]\cdot\left[\lim_{x\to -2} r_{(x)}\right]\cdot\left[\lim_{x\to -2} s_{(x)}\right] = 4\cdot 0\cdot(-3) = 0$$

$$c.\ \lim_{x\to -2}\frac{-4p_{(x)} + 5r_{(x)}}{s_{(x)}} = \frac{\lim_{x\to -2}\left(-4p_{(x)} + 5r_{(x)}\right)}{\lim_{x\to -2} s_{(x)}} = \frac{-4\lim_{x\to -2} p_{(x)} + 5\lim_{x\to -2} r_{(x)}}{\lim_{x\to -2} s_{(x)}} =$$

$$= \frac{-4\cdot 4 + 5\cdot 0}{-3} = \frac{-16 + 0}{-3} = \frac{16}{3}$$