מועד א' חורף 2012

גבול וחקירה תוך שימוש במשפט היסודי של החשבון האינטגראלי.

א. חשב את ערך הגבול $\lim_{x\to 1}\frac{1}{x^5-1}\int_1^x \sin t^4\,dt$

ב. מצא את נקודות הפיתול ואת תחומי הקעירות והקמירות של $F_{(x)}=\int_2^x (2\arctan t-t)\,dt$

פיתרון א' : לחשב את $\int_1^x \sin t^4\,dt$ זה מסובך מאוד, כך שעלינו למצוא "דרך עוקפת".

האינטגרל $\int_1^x f_{(t)}\,dt$ מתאים לתבנית המשפט היסודי וצועק לנו "גזור אותי לפי x וקבל את $f_{(x)}$".

בהקשר זה שבו אנו נדרשים לחשב גבול של מנה, $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\int_1^x \sin t^4 dt}{x^5-1}$, גזירה מרמזת על שימוש בכלל לופיטל.

עלינו רק לוודא שהגבול "כפי שהוא" מניב $\left[\frac{0}{0}\right]$ או $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, אחרת כלל לופיטל אינו רלוונטי.

המכנה מתאפס, $\lim_{x\to 1} x^5-1=0$, וגם המונה מתאפס, $\lim\limits_{x\to 1}\int_1^x f_{(t)}\,dt=0$, כי הגבול העליון ← לגבול התחתון.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\int_1^x \sin t^4\,dt}{x^5-1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{d}{dx}\int_1^x \sin t^4\,dt}{\frac{d}{dx}(x^5-1)} = \lim_{x\to 1}\frac{\sin x^4}{5x^4} = \frac{\sin 1}{5} \approx 0.168$$

פיתרון ב' : כדי למצוא את שיעורי ה- X של נקודות הפיתול של $F_{(x)}$ ואת תחומי הקעירות והקמירות שלה, יש לגוזרה פעמיים.

את הנגזרת הראשונה קל למצוא בעזרת המשפט היסודי: $F'_{(x)} = \frac{d}{dx}\int_2^x f_{(t)}\,dt = f_{(x)}$

$$F'_{(x)} = \frac{d}{dx}\int_2^x (2\arctan t-t)\,dt = 2\arctan x - x$$

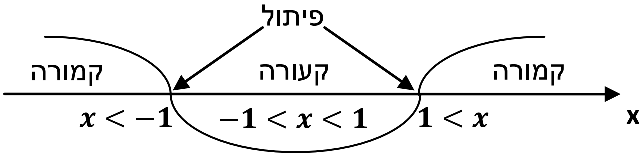
את הנגזרת השנייה נמצא באמצעות גזירה ישירה של הנגזרת הראשונה:

$$F''_{(x)} = \frac{d}{dx}(2\arctan x - x) = 2\cdot\frac{d}{dx}\arctan x - \frac{d}{dx}x = 2\cdot\frac{1}{x^2+1}-1$$

הפונקציה $F_{(x)}$ קעורה כאשר $F''_{(x)}>0$ וקמורה כאשר $F''_{(x)}<0$:

$$F''_{(x)}>0 \;=>\; \frac{2}{x^2+1}-1>0 \;=>\; 2-(x^2+1)>0 \;=>\; 2-x^2-1>0 \;=>$$

$$=>\; -x^2+1>0 \;=>\; x^2-1<0 \;=>\; (x+1)(x-1)<0 \;=>$$



כדי לחשב את שיעורי ה- y של נקודות הפיתול של $F_{(x)}$, אין מנוס מלחשב את האינטגרל **המסוים** הנתון :

$$F_{(x)} = \int_2^x (2\arctan t - t)\,dt = \int_2^x 2\arctan t\,dt - \int_2^x t\,dt$$

$$\int u \cdot dv \quad = \quad u \cdot v - \int v \cdot du$$

$$\int arctan\, t \cdot 2dt \;\rightarrow\; \begin{cases} u = arctan\, t & => \quad du = \dfrac{1}{t^2+1}dt \\ dv = 2dt & => \quad v = \displaystyle\int 2dt = 2t \end{cases}$$

$$\int arctan\, t \cdot 2dt \quad = \quad 2tarctan\, t - \int 2t \cdot \frac{1}{t^2+1}dt$$

$$\int \frac{2t}{t^2+1}dt \quad => \quad \begin{cases} z = t^2+1 \\ dz = 2tdt \end{cases} \quad = \quad \int \frac{1}{z}dz \quad = \quad ln|z| \quad = \quad ln(t^2+1)$$

$$\int 2\, arctan\, t\, dt \quad = \quad 2tarctan\, t - \; ln(t^2+1)$$

$$F_{(x)} \quad = \quad \int_2^x (2\, arctan\, t - t)\, dt \quad = \quad \left[2tarctan\, t \; - ln(t^2+1) - \frac{t^2}{2}\; \right|_2^x \quad =$$

$$F_{(x)} \quad = \quad 2xarctan\, x \; - ln(x^2+1) - \frac{x^2}{2} \quad - \quad (4arctan\, 2 - ln5 - 2)$$

$$F_{(-1)} \;=\; -2arctan(-1) - ln2 - \frac{1}{2} \;-\; (4arctan\, 2 - ln5 - 2) \;=$$

$$= \;\frac{\pi}{2} - ln2 - \frac{1}{2} - \; 4arctan\, 2 + ln5 + 2 \;=\; \frac{\pi+3}{2} \;+\; ln\frac{5}{2} \;-\; 4arctan\, 2 \;\approx\; -0.44$$

$$F_{(1)} \;=\; 2arctan(1) - ln2 - \frac{1}{2} \;-\; (4arctan\, 2 - ln5 - 2) \;=$$

$$= \;\frac{\pi}{2} - ln2 - \frac{1}{2} - \; 4arctan\, 2 + ln5 + 2 \;=\; \frac{\pi+3}{2} \;+\; ln\frac{5}{2} \;-\; 4arctan\, 2 \;\approx\; -0.44$$

נקודות הפיתול הן אם כך : $(\pm 1\,, -0.44)$