

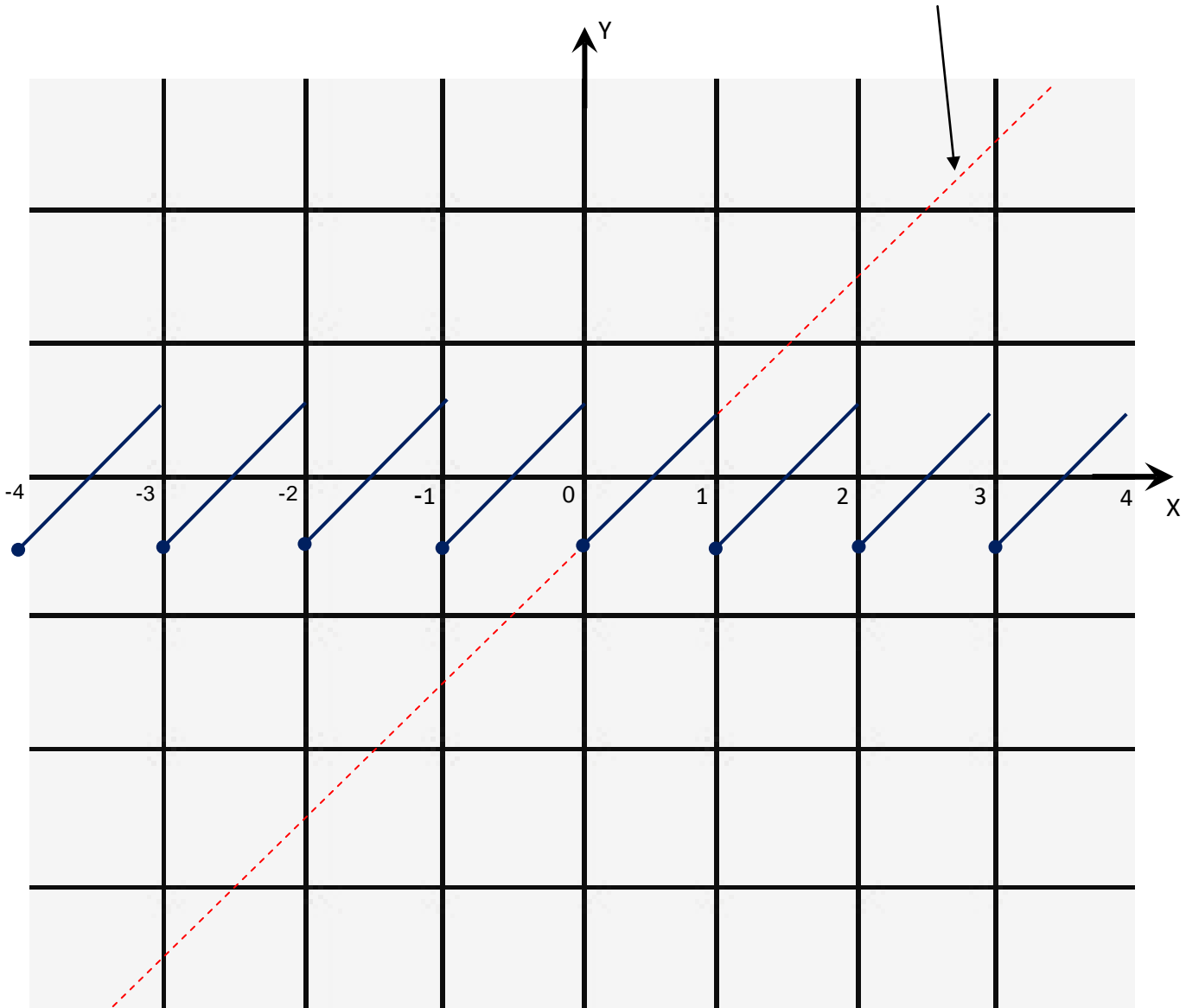
נתונה הפונקציה $f(x) = x - [x] - \frac{1}{2}$.

[x] מוגדר כמספר השלם הקרוב ביותר ל- x מלמטה, למשל, $[3.2] = 3$, $[0] = 0$, $[-4.2] = -5$.

- (א) שרטט את גרף הפונקציה.
- (ב) האם הפונקציה מוגדרת בנקודות $0, \pm 1, \pm 2, \dots$
- (ג) האם הפונקציה רציפה בנקודות אלו? (יש להוכיח)
- (ד) מהי הנגזרת של הפונקציה? האם הנגזרת רציפה?

פיתרון:

(א) נשרטט את $f(x) = x - \frac{1}{2}$ ואז נחסר את "השלם הקרוב ביותר ל- x מלמטה" (לחסר שלילי זה להוסיף חיובי!):



- (ב) הפונקציה מוגדרת בנקודות $x = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, וכמו כן בכל נקודה אחרת.
- (ג) הפונקציה אינה רציפה בנקודות $x = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ כי בנקודות אלה ישנה "קפיצה" בגרף, אבל נדרשנו להוכיח אז ניקח את $x = 1$ כדוגמה לכל x שלם: $\lim_{x \rightarrow 1^-} [f(x)] = \frac{1}{2} \neq f(1) = -\frac{1}{2}$.
- (ד) הנגזרת של הפונקציה בכל x שאינו שלם היא 1, כי זהו שיפוע הפונקציה בכל x שאינו שלם. בנקודות $x = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ הנגזרת אינה רציפה, כי פונקציה אינה גזירה היכן שהיא אינה רציפה.