חשב את האינטגרל $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} 2x \cdot arcsin(x^2)\, dx$ (מועד א' חורף 2011)

פיתרון : ראשית נפתור לפי הנוסחה לאינטגרל של $arcsin\, x$ שהלוואי והייתה לנו בדף הנוסחאות :

$$\int arcsin\, x\, dx \quad = \quad x\, arcsin\, x + \sqrt{1-x^2} + C$$

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} 2x \cdot arcsin(x^2)\, dx \quad => \begin{cases} u = x^2 \quad , \quad x = 0 \ \rightarrow \ u = 0 \quad , \quad x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \ \rightarrow u = \dfrac{1}{2} \\ du = 2xdx \end{cases}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} arcsin(u)\, du \quad = \quad \left[u\, arcsin\, u + \sqrt{1-u^2}\right|_0^{1/2} \quad =$$

$$\frac{1}{2}\, arcsin\, \frac{1}{2} + \sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} - \left(0\, arcsin\, 0 + \sqrt{(1-0^2)}\right) \quad =$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{6} + \sqrt{1-\frac{1}{4}} - (0+1) \quad = \quad \frac{\pi}{12} + \sqrt{\frac{3}{4}} - 1 \quad = \quad \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1$$

אבל לצערנו אין לנו בדף הנוסחאות את הנוסחה לאינטגרל של $arcsin\, x$, אז נאלץ לפתור באמצעות אינטגרציה בחלקים :

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} 2x \cdot arcsin(x^2)\, dx \quad => \begin{cases} u = arcsin(x^2) \quad => \quad du = \dfrac{2x}{\sqrt{1-x^4}} dx \\ dv = 2xdx \quad => \quad v = \displaystyle\int 2xdx = x^2 \end{cases}$$

$$\int u \cdot dv \quad = \quad u \cdot v - \int v \cdot du$$

$$\int arcsin(x^2) \cdot 2xdx \quad = \quad x^2 arcsin(x^2) - \int x^2 \cdot \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}} dx$$

$$\int \frac{2x^3}{\sqrt{1-x^4}} dx \quad => \quad \begin{cases} t = 1-x^4 \\ dt = -4x^3 dx \end{cases} \quad = \quad \int \frac{-2 \cdot 2x^3}{-2\sqrt{1-x^4}} dx \quad = \quad -\int \frac{-4x^3}{2\sqrt{1-x^4}} dx$$

$$= \quad -\int \frac{1}{2\sqrt{t}} dt \quad = \quad -\sqrt{t} \quad = \quad -\sqrt{1-x^4}$$

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} 2x \cdot arcsin(x^2)\, dx = \left[x^2 arcsin(x^2) + \sqrt{1-x^4}\right|_0^{1/\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\, arcsin\, \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{3}{4}} - (1)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{6} + \sqrt{\frac{3}{4}} - 1 \quad = \quad \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1$$