חורף 2009

א. מצא ביטוי עבור $\boldsymbol{sin\left(arctan\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)}$ במונחים של $\boldsymbol{x}$.

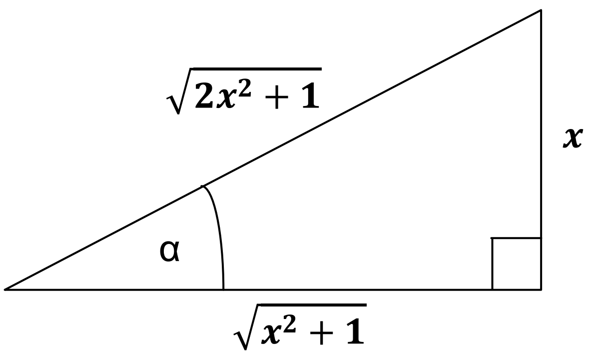
ב. חשב את $\int_{-3}^{-2}\frac{1}{y^2+6y+10}\,dy$

פיתרון א :

$\alpha = arctan\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ היא הזווית אשר הטנגנס שלה (מול חלקי ליד) הוא $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

מפיתגורס נקבל שהיתר הוא $\sqrt{\sqrt{x^2+1}^{\,2}+x^2} = \sqrt{x^2+1+x^2} = \sqrt{2x^2+1}$

הסינוס של α (מול חלקי יתר) הוא לכן $sin(\alpha) = sin\left(arctan\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{x}{\sqrt{2x^2+1}}$



$$\boxed{\begin{aligned} sin\,\alpha &= \frac{x}{\sqrt{2x^2+1}} \\ cos\,\alpha &= \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{2x^2+1}} \\ tan\,\alpha &= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \end{aligned}}$$

פיתרון ב :

$$\int_{-3}^{-2}\frac{1}{y^2+6y+10}\,dy = \int_{-3}^{-2}\frac{1}{(y+3)^2+1}\,dy \rightarrow \begin{cases} u = y+3 \\ du = dy \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} y=-3 \rightarrow u=0 \\ y=-2 \rightarrow u=1 \end{array}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{u^2+1}\,du = arctan\,u\Big|_0^1 = arctan\,1 - arctan\,0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$$