מועד א' 2010

א. חשב את $\int_0^1 x^{15}\sqrt{1+3x^8}\,dx$

ב. חשב את $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{3t^2+t+4}{t^3+t}\,dt$

א. פיתרון באמצעות הכנסה לדיפרנציאל (החלפת משתנים):

$$\int_0^1 x^{15}\sqrt{1+3x^8}dx \quad => \quad \begin{cases} u = 1+3x^8 \\ du = 24x^7dx \end{cases} \quad => \quad x^8 = \frac{u-1}{3} \qquad \begin{matrix} x=0 \to u=1 \\ x=1 \to u=4 \end{matrix}$$

$$\int_0^1 x^{15}\sqrt{1+3x^8}dx = \int_0^1 x^8\cdot x^7\sqrt{1+3x^8}dx = \frac{1}{24}\int_0^1 x^8\sqrt{1+3x^8}\cdot 24x^7dx = \frac{1}{24}\int_1^4 \frac{u-1}{3}\sqrt{u}\cdot du$$

$$\frac{1}{72}\int_1^4 (u-1)\sqrt{u}\cdot du = \frac{1}{72}\int_1^4\left(u^{\frac{3}{2}}-u^{\frac{1}{2}}\right)du = \frac{1}{72}\left(\frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}-\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_1^4 = \frac{1}{36}\left(\frac{u^{\frac{5}{2}}}{5}-\frac{u^{\frac{3}{2}}}{3}\right)\Bigg|_1^4 =$$

$$= \frac{1}{36}\left[\left(\frac{4^{\frac{5}{2}}}{5}-\frac{4^{\frac{3}{2}}}{3}\right)-\left(\frac{1^{\frac{5}{2}}}{5}-\frac{1^{\frac{3}{2}}}{3}\right)\right] = \frac{1}{36}\left[\left(\frac{32}{5}-\frac{8}{3}\right)-\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right)\right] = \frac{1}{36}\left(\frac{31}{5}-\frac{7}{3}\right) =$$

$$= \frac{1}{36}\left(\frac{93}{15}-\frac{35}{15}\right) = \frac{1}{36}\cdot\frac{58}{15} = \frac{58}{540} = \frac{29}{270}$$

ב. פיתרון באמצעות פירוק לשברים חלקיים (הטרינום שבמונה אינו פריק לצערנו, $\Delta < 0$):

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{3t^2+t+4}{t^3+t}dt \quad => \quad \frac{3t^2+t+4}{t(t^2+1)} = \frac{A}{t}+\frac{Bt+C}{t^2+1} = \frac{A(t^2+1)+(Bt+C)t}{t(t^2+1)} =$$

$$= \frac{(A+B)t^2+Ct+A}{t(t^2+1)} = \frac{3t^2+t+4}{t(t^2+1)} \quad => \quad \begin{cases} A+B=3 \\ C=1 \\ A=4 \end{cases} \quad => \quad B=-1$$

$$\frac{3t^2+t+4}{t(t^2+1)} = \frac{4}{t}+\frac{-t+1}{t^2+1} = \frac{4}{t}-\frac{t}{t^2+1}+\frac{1}{t^2+1}$$

נרשום את האינטגרל מחדש בצורתו המפורקת :

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{3t^2+t+4}{t^3+t}dt = \int_1^{\sqrt{3}} \left(\frac{4}{t}-\frac{t}{t^2+1}+\frac{1}{t^2+1}\right)dt = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{4}{t}dt - \int_1^{\sqrt{3}} \frac{t}{t^2+1}dt + \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{t^2+1}dt$$

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{4}{t}dt = 4ln|t|\Big|_1^{\sqrt{3}} = 4\left(ln\sqrt{3}-ln1\right) = 4ln\frac{\sqrt{3}}{1} = 4\,ln\sqrt{3} = ln9$$

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{t}{t^2+1}dt \quad => \quad \begin{cases} u=t^2+1 \\ du=2tdt \end{cases} \quad , \quad t=1 \to u=2 \quad , \quad t=\sqrt{3} \to u=4$$

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{t}{t^2+1}dt = \frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{3}} \frac{2t}{t^2+1}dt = \frac{1}{2}\int_2^4 \frac{1}{u}du =$$

$$= \frac{1}{2}ln|u|\Big|_2^4 = \frac{1}{2}(ln4-ln2) = \frac{1}{2}ln\frac{4}{2} = \frac{1}{2}ln2 = ln\sqrt{2}$$

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{t^2+1}dt = arctan(t)\Big|_1^{\sqrt{3}} = arctan\left(\sqrt{3}\right)-arctan(1) = \frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$$

לסיכום:

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{3t^2+t+4}{t^3+t}dt = ln9 - ln\sqrt{2} + \frac{\pi}{12} = ln\frac{9}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{12} \approx 2.11$$

יכולנו גם כך (ע"פ רעיון של השלאגר משיכון ל') :

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{3t^2+t+4}{t^3+t}dt \quad = \quad \int_1^{\sqrt{3}} \frac{3t^2+t+4}{t(t^2+1)}dt \quad = \quad \int_1^{\sqrt{3}} \left(\frac{3t}{t^2+1}+\frac{1}{t^2+1}+\frac{4}{t(t^2+1)}\right)dt \quad =$$

$$= \quad 3\int_1^{\sqrt{3}} \frac{t}{t^2+1}dt \quad + \quad \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{t^2+1}dt \quad + \quad 4\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{t(t^2+1)}dt$$

את שני האינטגרלים הראשונים פתרנו קודם. את האינטגרנד האחרון נפרק לשברים חלקיים, מתישהו זה מגיע ואין מנוס מכך :

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{t(t^2+1)}dt \quad => \quad \frac{1}{t(t^2+1)} \quad = \quad \frac{A}{t}+\frac{Bt+C}{t^2+1} \quad = \quad \frac{A(t^2+1)+(Bt+C)t}{t(t^2+1)} \quad =$$

$$= \quad \frac{(A+B)t^2+Ct+A}{t(t^2+1)} \quad = \quad \frac{1}{t(t^2+1)} \quad => \quad \begin{cases} A+B=0 \quad => \quad B=-1 \\ C=0 \\ A=1 \end{cases}$$

$$\frac{1}{t(t^2+1)} \quad = \quad \frac{1}{t}+\frac{-t}{t^2+1} \quad = \quad \frac{1}{t}-\frac{t}{t^2+1}$$

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{t(t^2+1)}dt \quad = \quad \int_1^{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{t}-\frac{t}{t^2+1}\right)dt \quad = \quad \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{t}dt \; - \; \int_1^{\sqrt{3}} \frac{t}{t^2+1}dt$$

אז מה יש לנו בינתיים ? סיכום ביניים - ספירת מלאי :

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{3t^2+t+4}{t^3+t}dt \quad = \quad 3\int_1^{\sqrt{3}} \frac{t}{t^2+1}dt \; + \; \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{t^2+1}dt \; + \; 4\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{t}dt \; - \; 4\int_1^{\sqrt{3}} \frac{t}{t^2+1}dt$$

כינוס איברים דומים :

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{3t^2+t+4}{t^3+t}dt \quad = \quad \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{t^2+1}dt \; + \; 4\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{t}dt \; - \; \int_1^{\sqrt{3}} \frac{t}{t^2+1}dt$$

"בדרך הקודמת", להזכירכם, קיבלנו בדיוק את אותו הדבר :

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{3t^2+t+4}{t^3+t}dt \quad = \quad \int_1^{\sqrt{3}} \frac{4}{t}dt \; - \; \int_1^{\sqrt{3}} \frac{t}{t^2+1}dt \; + \; \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{t^2+1}dt$$