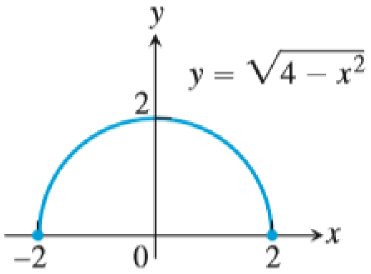
פונקציות רציפות



פונקציה היא **רציפה על אינטרוול** אם ורק אם היא רציפה בכל נקודה של האינטרוול.

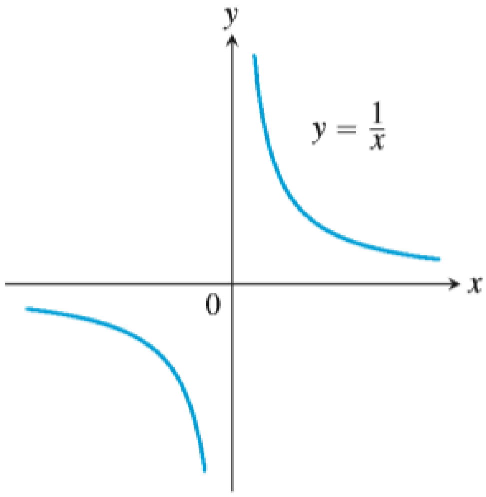
לדוגמה, פונקצית חצי המעגל שמשורטטת משמאל היא רציפה על האינטרוול $[-2,2]$, שהינו תחום ההגדרה שלה.

פונקציה רציפה היא פונקציה שהינה רציפה בכל נקודה שבתחום ההגדרה שלה.

פונקציה רציפה אינה צריכה להיות רציפה על כל אינטרוול.

לדוגמה, $\boldsymbol{y = \frac{1}{x}}$ אינה רציפה על $[\boldsymbol{-1, 1}]$, אך רציפה על פני תחום ההגדרה שלה $(-\infty, \boldsymbol{0})\ \mathbf{U}\ (\boldsymbol{0}, \infty)$.

דוגמאות להבהרה:



הפונקציה $\boldsymbol{y = \frac{1}{x}}$ היא **פונקציה רציפה** מפני שהיא רציפה בכל נקודה שבתחום ההגדרה שלה.

עם זאת, יש לה נקודת אי רציפות ב- $\boldsymbol{x = 0}$ כי אינה מוגדרת שם. היא אינה רציפה לכל $\boldsymbol{x}$ אם כך.

פונקצית הזהות $\boldsymbol{y = x}$ רציפה אף היא בכל נקודה שבתחום ההגדרה שלה (שהינו כל $\boldsymbol{x}$, ולכן היא רציפה לכל $\boldsymbol{x}$).

THEOREM 9 Properties of Continuous Functions

If the functions f and g are continuous at $x = c$, then the following combinations are continuous at $x = c$.

1. *Sums*: $f + g$
2. *Differences*: $f - g$
3. *Products*: $f \cdot g$
4. *Constant multiples*: $k \cdot f$, for any number k
5. *Quotients*: f/g provided $g(c) \neq 0$
6. *Powers*: $f^{r/s}$, provided it is defined on an open interval containing c, where r and s are integers

את מרבית התכונות שבתיאורמה 9 ניתן להוכיח בעזרת חוקי הגבולות שבתיאורמה 1 (ראה "חוקי גבולות").

למשל, הוכחת הטענה שסכומן של שתי פונקציות רציפות הוא פונקציה רציפה:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to c}(f+g)(x) &= \lim_{x\to c}(f(x)+g(x)) \\
&= \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x), && \text{Sum Rule, Theorem 1} \\
&= f(c)+g(c) && \text{Continuity of } f, g \text{ at } c \\
&= (f+g)(c).
\end{aligned}$$

This shows that $f+g$ is continuous.

בדוגמה הבאה נשתמש בתכונה מס' 5 של תיאורמה 9 כדי להראות ש<u>מנת פולינומים</u> היא פונקציה רציפה.

ראשית, כל פולינום הינו רציף כי מתקיים בו $\lim_{x\to c} P_{(x)} = P_{(c)}$ (אם עוצרים לחשוב על זה לרגע, מציאת גבול בשיטת ההצבה מניחה <u>מראש</u> שתנאי זה מתקיים, ז"א מניחה מראש שהפונקציה רציפה):

THEOREM 2 Limits of Polynomials Can Be Found by Substitution

If $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$, then

$$\lim_{x\to c} P(x) = P(c) = a_n c^n + a_{n-1}c^{n-1} + \cdots + a_0.$$

לפיכך, מנת פולינומים $\frac{P_{(x)}}{Q_{(x)}}$ היא פונקציה רציפה בכל נקודה שבה היא מוגדרת $\left(Q_{(c)} \neq 0\right)$, לפי תכונה מס' 5.

<u>רציפותה של פונקציית הערך המוחלט</u>

הפונקציה $f_{(x)} = |x|$ רציפה לכל x:

עבור $0 < x$ מתקבל $f_{(x)} = x$, <u>פונקצית פולינום</u>. עבור $x < 0$ מתקבל $f_{(x)} = -x$, אף היא <u>פונקצית פולינום</u>. לבסוף, בראשית, $lim_{x\to 0}|x| = 0 = |0|$.

<u>רציפותה של פונקציית הטנגנס</u>

הפונקציה $f_{(x)} = \tan x$ רציפה בתחום הגדרתה:

$\sin x = f_{(x)}$ רציפה (לכל x), $\cos x = f_{(x)}$ רציפה (לכל x). לפיכך $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = f_{(x)}$ רציפה, לפי תכונה מס' 5.

הרכבות

כל הרכבה של פונקציות רציפות היא רציפה.

הרעיון הוא שאם $\boldsymbol{f_{(x)}}$ רציפה ב- $\boldsymbol{x=c}$ ו- $\boldsymbol{g_{(x)}}$ רציפה ב- $\boldsymbol{x=f_{(c)}}$, אז $\boldsymbol{g\circ f}$ רציפה ב- $\boldsymbol{x=c}$.

במקרה זה, הגבול כאשר $\boldsymbol{x\to c}$ הינו $\boldsymbol{g_{\left(f_{(c)}\right)}}$.

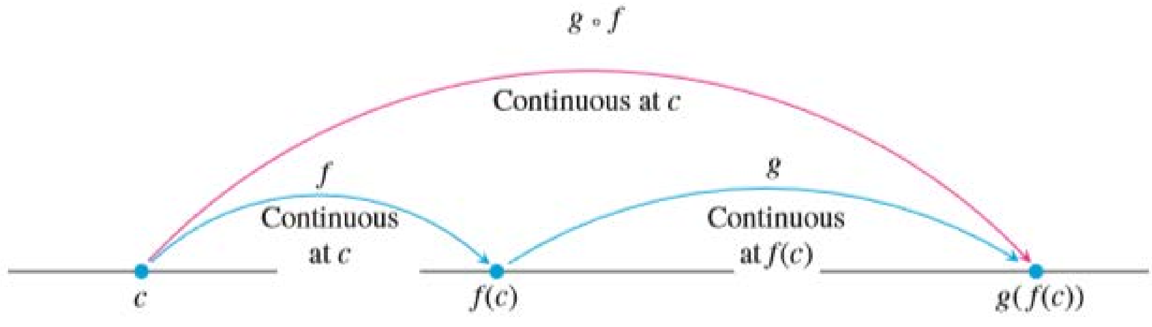


FIGURE 2.57 Composites of continuous functions are continuous.

THEOREM 10 Composite of Continuous Functions
If f is continuous at c and g is continuous at $f(c)$, then the composite $g \circ f$ is continuous at c.

תיאורמה 10 סבירה אינטואיטיבית, כי אם $\boldsymbol{x}$ קרוב ל- $\boldsymbol{c}$ אז $\boldsymbol{f_{(x)}}$ קרובה ל- $\boldsymbol{f_{(c)}}$, ומאחר ש- $\boldsymbol{g}$ רציפה ב- $\boldsymbol{f_{(c)}}$, מתקיים ש- $\boldsymbol{g_{\left(f_{(x)}\right)}}$ קרובה ל- $\boldsymbol{g_{\left(f_{(c)}\right)}}$.

הרכבה יכולה להכיל מספר כלשהו של פונקציות, נדרש רק שכל אחת מהפונקציות תהא רציפה בתחום הרלוונטי.

דוגמאות לשימוש בתיאורמות 9 ו- 10

הראה שהפונקציה $\boldsymbol{y=\sqrt{x^2-2x-5}}$ רציפה בתחום הגדרתה.

פיתרון: פונקצית השורש הריבועי רציפה על $[\boldsymbol{0},\infty)$ כי היא חזקה רציונאלית של פונקצית הזהות $\boldsymbol{f_{(x)}=x}$, שהינה רציפה.

אם כך, הפונקציה הנתונה היא הרכבה של שתי פונקציות רציפות – פונקצית פולינום ופונקצית השורש הריבועי, ולכן רציפה.

הראה שהפונקציה $\boldsymbol{y}=\frac{x^{2/3}}{1+x^4}$ רציפה בתחום הגדרתה.

פיתרון: המונה הוא פונקציה רציפה - חזקה רציונאלית של פונקצית הזהות $\boldsymbol{f_{(x)}=x}$, שהינה רציפה.

המכנה הוא פולינום - פונקציה רציפה. אם כך, הפונקציה הנתונה היא מנה של פונקציות רציפות ולכן רציפה.

הראה שהפונקציה $\boldsymbol{y}=\left|\frac{x-2}{x^2-2}\right|$ רציפה בתחום הגדרתה.

פיתרון: מנת הפולינומים היא פונקציה רציפה כי היא מנה של פונקציות רציפות.

הפונקציה הנתונה רציפה כי היא הרכבה של מנה רציפה עם פונקצית הערך המוחלט שאף היא רציפה.

הראה שהפונקציה $\boldsymbol{y}=\left|\frac{x\cdot\sin x}{x^2+2}\right|$ רציפה בתחום הגדרתה.

פיתרון: המונה הוא פונקציה רציפה כי הוא מכפלה של שתי פונקציות רציפות – פונקצית הסינוס ופונקצית הזהות $\boldsymbol{f_{(x)}=x}$.

המכנה הוא פולינום - פונקציה רציפה. אם כך המנה היא פונקציה רציפה - מנה של פונקציות רציפות.

הפונקציה הנתונה רציפה כי היא הרכבה של פונקצית המנה הרציפה הנ"ל עם פונקצית הערך המוחלט, שאף היא רציפה.

דיון בשאלה "האם פונקציה עם חור היא פונקציה רציפה?" מתוך האתר https://math.stackexchange.com

Say a function, $f(x)$, has a hole at $x = c$. So $f(c)$ does not exist. But say that the limit of $f(x)$ as x approaches c exists and is L. We can pick any positive number, ε, so that shifting x sufficiently close to c on the x-axis (so that the distance between x and c is always less than some number, δ) ensures that the distance between $f(x)$ and L will be less than our chosen epsilon. Does this set-up not imply continuity? Wikipedia says that c needs to be a "limit point" on our domain. Does that mean $f(c)$ has to exist or just that its limit has to exist?

תשובה:

If a function is continuous at every point in its domain, then it is a continuous function. The point c in your example is not in the domain of your function and should not affect the continuity of your function.

אם כך, הפונקציות שבהן אנו נתקלים הן רציפות בד"כ. כדי שפונקציה תהא לא רציפה, עליה "לקפוץ" היכן שהיא מוגדרת.

להלן שתי דוגמאות לפונקציות לא רציפות - פונקצית הערך השלם הגדול ביותר ופונקצית המדרגה:

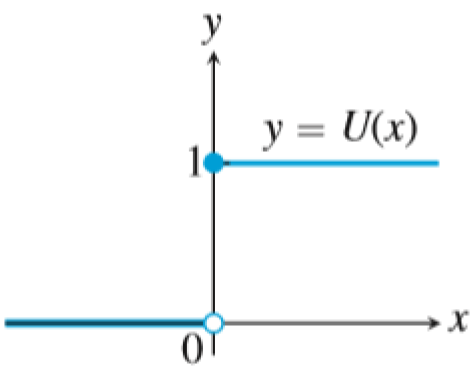


FIGURE 2.53 A function that is right-continuous, but not left-continuous, at the origin. It has a jump discontinuity there

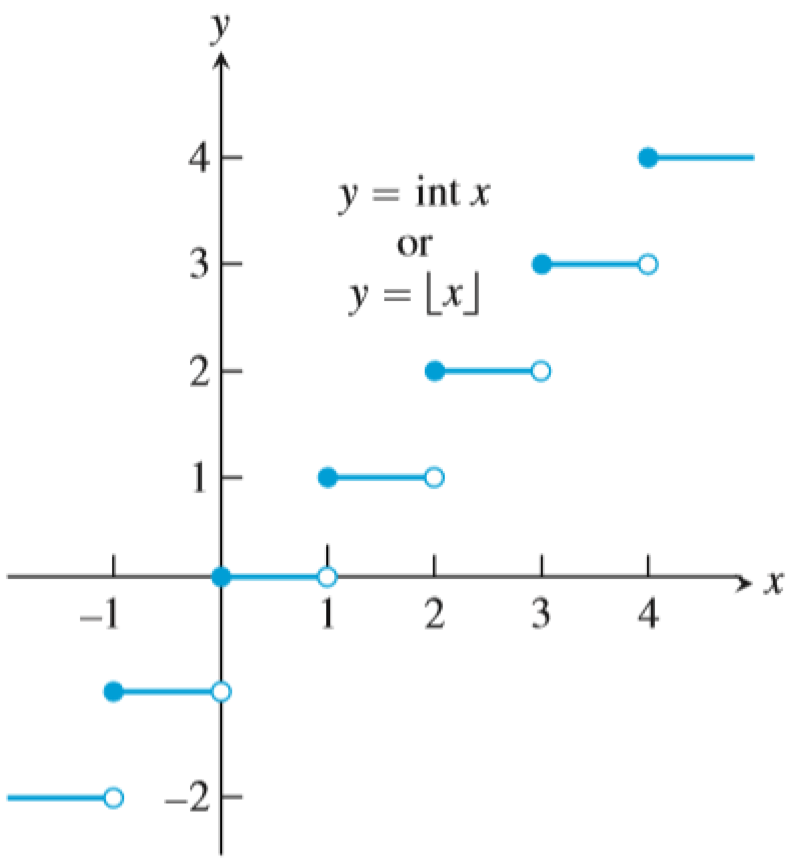


FIGURE 2.54 The greatest integer function is continuous at every noninteger point. It is right-continuous, but not left-continuous, at every integer