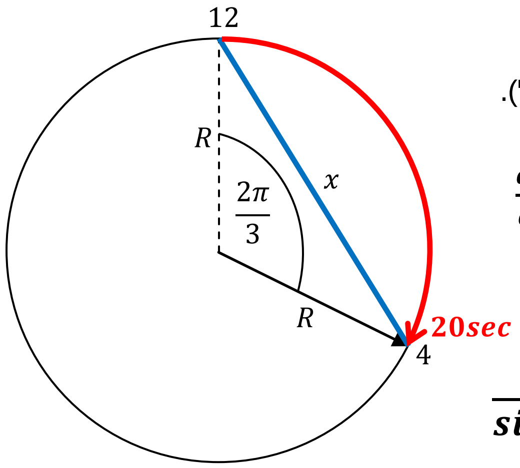
נתון שעון שאורך מחוג השניות שלו 20 ס"מ.
באיזה קצב משתנה אורך המיתר המחבר את השעה 12 וקצה המחוג, כשזה חולף דרך השעה 4 ?

__פיתרון__- ראשית נצייר את הבעיה $(R=20cm)$:

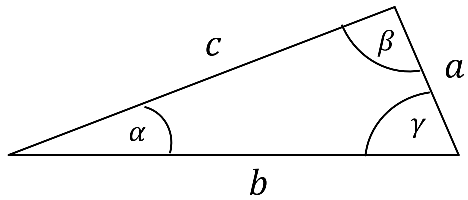


כשהמחוג בשעה 4, הזווית שבינו לבין השעה 12 היא $\frac{2\pi}{3}$ רדיאנים (שליש מעגל).

עלינו לחשב את קצב התארכותו של המיתר x ברגע זה, ז"א את $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=20sec}$

תזכורת למשפט הסינוסים: בכל משולש מתקיים:

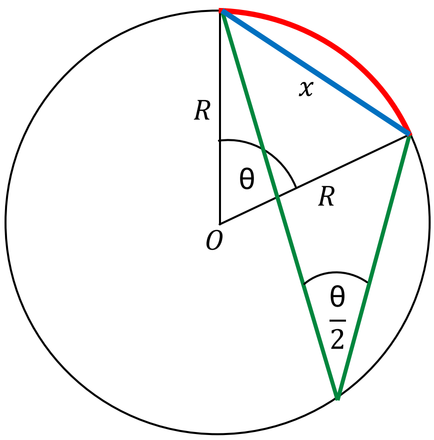
$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$$



כאשר המשולש חסום במעגל שרדיוסו R, מתקיימת ההרחבה:

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R$$

תזכורת למשפט בגיאומטריה: זווית היקפית שווה לחצי הזווית המרכזית הנשענת על אותה **הקשת** (או אותו **המיתר**).



נחפש את הקשר שבין אורך המיתר (x) לבין הזווית המרכזית (θ) .

המשולש המקורי שלנו אינו חסום במעגל השעון. לעומתו, המשולש החדש שהמצאנו כן חסום במעגל השעון, ולכן אפשר להשתמש בהרחבה שלעיל:

$$\frac{x}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}=2R \quad => \quad x_{(\theta)}=2R\cdot\sin\left(\frac{1}{2}\theta_{(t)}\right)$$

זהו הקשר שבין אורך המיתר לבין הזווית המרכזית - x כפונקציה של **θ**.

נשאלנו מהו קצב התארכותו של המיתר x בשעה 4, ז"א מהו $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=20sec}$.

לשמחתנו המחוג מסתובב במהירות קבועה של 2π רדיאנים לדקה, או π רדיאנים לשלושים שניות: $\frac{d\theta}{dt}=\frac{\pi}{30}\ rad/sec$.

הודות לכך אנו יודעים כי $\theta_{(t)}=\frac{\pi}{30}t$, ואפשר להציב זאת בביטוי ל- $x_{(\theta)}$ שקיבלנו קודם:

$$x_{(\theta)}=2R\cdot\sin\left(\frac{1}{2}\theta_{(t)}\right) \quad => \quad x_{(t)}=2R\cdot\sin\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{30}t\right) \quad => \quad x_{(t)}=40\cdot\sin\left(\frac{\pi}{60}t\right)$$

$$\frac{dx}{dt}=40\cdot\cos\left(\frac{\pi}{60}t\right)\cdot\frac{\pi}{60}=\frac{2\pi}{3}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{60}t\right)$$

כשהמחוג בשעה 4, $t=20\ sec$ (שליש דקה). נציב זאת ונקבל:

$$\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=20sec}=\frac{2\pi}{3}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{60}\cdot 20\right)=\frac{2\pi}{3}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{3}\ cm/sec$$

ברוב הבעיות $\frac{d\theta}{dt}$ אינו קבוע בזמן, ולכן ייתנו לנו ערכו **ברגע הרלוונטי**. נשתמש אז בכלל השרשרת, כפי שמודגם להלן:

נניח שמחוג השניות אינו מסתובב במהירות קבועה כמקודם, אלא במהירות אשר משתנה עם הזמן ללא חוקיות ידועה.

אי אפשר אז להסיק קשר מתמטי בין זווית המחוג לבין הזמן שחלף, ז"א לנסח את $\boldsymbol{\theta}$ כפונקציה של $\boldsymbol{t}$ כפי שעשינו קודם, ולכן

חייבים אנו לקבל **כנתון** את קצב ההשתנות של הזווית **ברגע הרלוונטי**: $\frac{d\theta}{dt}\Big|_{t=20}$, ולהשתמש בנתון זה בכלל השרשרת:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} \qquad => \qquad \frac{dx}{dt}\Big|_{t=20} = \frac{dx}{d\theta}\Big|_{\theta=\frac{2\pi}{3}} \cdot \frac{d\theta}{dt}\Big|_{t=20}$$

את הקשר שבין אורך המיתר לבין הזווית המרכזית גילינו כבר מזמן: $x_{(\theta)} = 2R\cdot\sin\left(\frac{1}{2}\theta_{(t)}\right)$

נגזור את $\boldsymbol{x}$ לפי $\boldsymbol{\theta}$ ונקבל נוסחה ליחס שבין $\boldsymbol{dx}$ (השינוי הקטן באורך המיתר) לבין $\boldsymbol{d\theta}$ (השינוי הקטנטן) בזווית המחוג :

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\left[2R\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] = 2R\cdot\frac{d}{d\theta}\left[\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] = 2R\cdot\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot\frac{1}{2} = R\cdot\cos\left(\frac{1}{2}\theta_{(t)}\right).$$

נציב בנוסחה זו שהפקנו את זוויתו של המחוג ברגע הרלוונטי, ונקבל את היחס הנ"ל נכון לאותו רגע :

$$\frac{dx}{d\theta}\Big|_{\theta=\frac{2\pi}{3}} = R\cdot\cos\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{3}\right) = 20\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 10\ cm/rad$$

משמעות התוצאה שקיבלנו היא, **שאם מעתה ואילך** יתארך המיתר בקצב שבו הוא מתארך **כרגע**, הוא יתארך בעשרה ס"מ

עבור כל רדיאן שמתווסף לזווית המרכזית $\boldsymbol{\theta}$.

את $\frac{d\theta}{dt}\Big|_{t=20}$ אנו מקבלים כנתון, נניח $\frac{d\theta}{dt}\Big|_{t=20} = \frac{\pi}{30}\ rad/sec$.

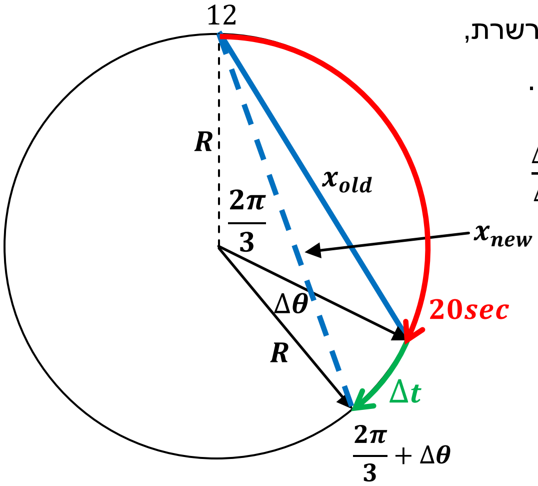
$$\frac{dx}{dt}\Big|_{t=20} = \frac{dx}{d\theta}\Big|_{\theta=\frac{2\pi}{3}} \cdot \frac{d\theta}{dt}\Big|_{t=20} = 10\cdot\frac{\pi}{30} = \frac{\pi}{3}\ cm/sec$$

כעת נפתור את הבעיה תוך שימוש בהגדרת הנגזרת. הרעיון הוא להניח למחוג להתקדם אל מעבר לשעה ארבע, ולכנות את

התוספת לזוויתו $\Delta\boldsymbol{\theta}$. את פרק הזמן הנדרש למחוג כדי להגדיל את זוויתו ב- $\Delta\boldsymbol{\theta}$ נכנה $\Delta\boldsymbol{t}$. בשלב ראשון נפיק ביטוי המתאר

את קצב ההתארכות **הממוצע** של המיתר x בפרק הזמן Δt. נשתמש בכלל השרשרת,

למרות שבבעיה זו אפשר להימנע מכך בזכות היות מהירות המחוג קבועה בזמן.



$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta\theta}\cdot\frac{\Delta\theta}{\Delta t} \quad , \quad x_{(\theta)} = 2R\cdot\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad \textit{as derived earlier}$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta\theta} = \frac{x_{(\theta new)} - x_{(\theta old)}}{\Delta\theta} = \frac{2R\cdot\sin\left(\frac{\frac{2\pi}{3}+\Delta\theta}{2}\right) - 2R\cdot\sin\left(\frac{\frac{2\pi}{3}}{2}\right)}{\Delta\theta} =$$

$$= 2R\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\Delta\theta}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\Delta\theta} = 2R\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cdot\cos\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cdot\sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\Delta\theta} =$$

$$= \;2R\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)+\frac{1}{2}\cdot\sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\Delta\theta} \;=\; R\frac{\sqrt{3}\cdot\cos\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)+\sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)-\sqrt{3}}{\Delta\theta} \;=\; \frac{\Delta x}{\Delta\theta}$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{\Delta x}{\Delta\theta}\cdot\frac{\Delta\theta}{\Delta t} \;=\; R\frac{\sqrt{3}\cdot\cos\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)+\sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)-\sqrt{3}}{\Delta\theta}\cdot\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

הביטוי שהפקנו כאן מתאר את קצב ההתארכות הממוצע של המיתר x לאורך פרק הזמן (אינטרוול הזמן) Δt.

נשאלנו אומנם מהו קצב התארכותו של המיתר x **בתחילת** האינטרוול Δt, עת חולף המחוג ב- $t_0 = 20sec$ (שעה ארבע),

אך אנו יודעים שככל שקצר אינטרוול הזמן Δt, דומה יותר קצב ההתארכות הממוצע לאורכו, לזה הרגעי שבתחילתו.

כאשר אינטרוול הזמן Δt שואף לאפס ($\Delta t \to 0$), הופך הממוצע לרגעי: $\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}\Big|_{t_0+\Delta t} = \frac{dx}{dt}\Big|_{t_0}$.

נזכור כי מהירות המחוג קבועה בזמן ולכן $\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\Big|_{t_0+\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}\Big|_{t_0} = \frac{\pi}{30}rad/sec$, ז"א מהירותו הממוצעת של המחוג שווה

לזו הרגעית בכל רגע נתון. אם לא כך היה, היינו מקבלים את $\frac{d\theta}{dt}\Big|_{t=20}$ כנתון.

ברור לנו שכאשר $\Delta t \to 0$ גם $\Delta\theta \to 0$, שהרי בפרק זמן קצר מאוד משתנה זווית המחוג במעט מאוד.

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta\theta}\cdot\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t} \;=\; \lim_{\Delta\theta\to 0} R\frac{\sqrt{3}\cdot cos\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)+sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)-\sqrt{3}}{\Delta\theta}\cdot\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\pi}{30} \;=$$

$$= \frac{R\pi}{30}\cdot\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\sqrt{3}\cdot cos\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)+sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)-\sqrt{3}}{\Delta\theta} \;=$$

$$= \frac{R\pi}{30}\cdot\left[\sqrt{3}\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{cos\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)-1}{\Delta\theta}+\frac{1}{2}\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)}{\frac{\Delta\theta}{2}}\right] \;=\; \frac{R\pi}{30}\cdot\left[\sqrt{3}\cdot 0+\frac{1}{2}\cdot 1\right] \;=$$

$$= \frac{R\pi}{60} = \frac{20\pi}{60} = \frac{\pi}{3}\,cm/sec$$

A Proof that $\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{cos\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)-1}{\Delta\theta} = 0$:

$$cos2\alpha = 1-2sin^2\alpha \;\;=>\;\; cos2\alpha - 1 = -2sin^2\alpha \;\;=>\;\; cos\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)-1 = -2sin^2\left(\frac{\Delta\theta}{4}\right)$$

$$\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{cos\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)-1}{\Delta\theta} = \lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{-2sin^2\left(\frac{\Delta\theta}{4}\right)}{\Delta\theta} \;=\; -\frac{1}{2}\cdot\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{sin\left(\frac{\Delta\theta}{4}\right)}{\frac{\Delta\theta}{4}}\cdot\lim_{\Delta\theta\to 0}sin\left(\frac{\Delta\theta}{4}\right) \;=$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 0 \;=\; 0$$

נפנה כעת לאפשרות אחרת - קירוב של עשירית האחוז. אנו פטורים כאן מהפעלת גבול, שהרי מדובר בקירוב (מיצוע).

$$\Delta\theta = \frac{\theta_{old}}{1000} = \frac{\frac{2\pi}{3}}{1000} = \frac{\pi}{1500} \qquad => \qquad \theta_{new} = \theta_{old} + \Delta\theta = \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{1500} = \frac{1001\pi}{1500}\ rad$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta\theta} \cdot \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \quad , \quad x_{(\theta)} = 2R \cdot \sin\left(\frac{1}{2}\theta\right) \quad as\ derived\ earlier$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta\theta} = \frac{x_{(\theta new)} - x_{(\theta old)}}{\Delta\theta} = \frac{2R \cdot \sin\left(\frac{1}{2}\frac{1001\pi}{1500}\right) - 2R \cdot \sin\left(\frac{1}{2}\frac{2\pi}{3}\right)}{\frac{\pi}{1500}} =$$

$$= \frac{3000R}{\pi}\left[\sin\left(\frac{1001\pi}{3000}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta\theta} \cdot \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{3000R}{\pi}\left[\sin\left(\frac{1001\pi}{3000}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] \cdot \frac{\pi}{30} = 100R\left[\sin\left(\frac{1001\pi}{3000}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] =$$

$$= 2000[5.23123829 \cdot 10^{-4}] = 1.046247658\ cm/sec = \pi/3 - 0.091\%$$

התוצאה שקיבלנו סוטה (כלפי מטה) מהתוצאה המדויקת שקיבלנו קודם בפחות מעשירית האחוז.

כך עשו זאת היוונים הקדמונים, 1600 שנה לפני שהתפתח מושג הגבול ועימו הנגזרת.